

2. Proprietà delle potenze

Le potenze godono di alcune proprietà che ci permettono di semplificare i calcoli.

Potenze con la stessa base

Prodotto di potenze con la stessa base

Calcoliamo il prodotto $6^3 \times 6^4$.

I due fattori hanno la stessa base, quindi si può procedere nel seguente modo:

$$6^3 \times 6^4 = (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6 \times 6 \times 6) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^{3+4} = 6^7$$

L'esponente 7 è uguale alla somma $3 + 4$ degli esponenti delle potenze del prodotto dato.

Il **prodotto di due o più potenze aventi la stessa base** è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$

ESEMPIO

$$5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6 \quad 2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9$$

Quoziente di potenze con la stessa base

Calcoliamo il quoziente $2^6 : 2^4$.

Per definizione di potenza si ha:

$$2^6 : 2^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) : (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 = 2^{6-4} = 2^2$$

L'esponente 2 è uguale alla differenza $6 - 4$ degli esponenti delle potenze del quoziente dato.

Il **quoziente di due potenze aventi la stessa base** è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza fra gli esponenti. $a^n : a^m = a^{n-m} \quad n > m$

ESEMPIO

$$8^7 : 8^3 = 8^{7-3} = 8^4 \quad 6^4 : 6^7 = \text{non ha soluzione tra i numeri naturali perché } 4 < 7$$



Potenza di una potenza

Eleviamo al quadrato la potenza: $(3^3)^2$.

Si procede così:

$$(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3 = 3^{3+3} = 3^{3 \times 2} = 3^6$$

L'esponente 6 è uguale al prodotto 3×2 tra gli esponenti della potenza e del suo elevamento al quadrato.

La **potenza di una potenza** è una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

ESEMPIO

$$(2^6)^2 = 2^{6 \times 2} = 2^{12} \quad [(3^4)^2]^3 = 3^{4 \times 2 \times 3} = 3^{24}$$

Potenze con lo stesso esponente

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

Calcoliamo il prodotto $2^2 \times 4^2 \times 5^2$.

I tre fattori hanno lo stesso esponente, quindi si può procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} 2^2 \times 4^2 \times 5^2 &= (2 \times 2) \times (4 \times 4) \times (5 \times 5) = \\ &= (2 \times 4 \times 5) \times (2 \times 4 \times 5) = (2 \times 4 \times 5)^2 \end{aligned}$$

L'esponente resta lo stesso e la base diventa il prodotto delle basi.

Il **prodotto di due o più potenze aventi lo stesso esponente** è la potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente. $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$

ESEMPIO

$$| 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000 \quad 3^2 \times 7^2 = (3 \times 7)^2 = 21^2 = 441$$

Viceversa per elevare a potenza il prodotto di due numeri si può procedere come segue:

$$(4 \times 5)^2 = 4^2 \times 5^2$$

La **potenza di un prodotto** è uguale al prodotto delle potenze con uguale esponente dei singoli fattori. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

ESEMPIO

$$| (5 \times 7)^2 = 5^2 \times 7^2 \qquad (9 \times 4)^5 = 9^5 \times 4^5$$

Quoziente di potenze con lo stesso esponente

Calcoliamo il quoziente $6^3 : 2^3$.

Per definizione di potenza si ha:

$$6^3 : 2^3 = 216 : 8 = 27 = 3^3$$

$$\text{Quindi } 6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3$$

L'esponente resta lo stesso e la base diventa uguale al quoziente delle basi.

Il **quoziente di due potenze aventi lo stesso esponente** è la potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente. $a^n : b^n = (a : b)^n \quad b \neq 0$

ESEMPIO

$$| 14^3 : 7^3 = (14 : 7)^3 = 2^3 \qquad 6^{12} : 3^{12} = (6 : 3)^{12} = 2^{12}$$

Viceversa per elevare a potenza il quoziente di due numeri si può procedere come segue:

$$(40 : 5)^2 = 40^2 : 5^2$$

La **potenza di un quoziente** è uguale al quoziente delle potenze con uguale esponente del dividendo e del divisore.

$$(a : b)^n = a^n : b^n \quad b \neq 0$$

ESEMPIO

$$(21 : 7)^3 = 21^3 : 7^3$$

$$(50 : 5)^4 = 50^4 : 5^4$$