

PRIMI ELEMENTI DI GEOMETRIA NELLO SPAZIO

1. RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Negli anni passati abbiamo studiato la geometria nel piano, ora studieremo la geometria nello spazio: oltre ai punti e alle rette entrano in gioco anche i piani.

Se ricordi le proprietà dei **punti** e delle **rette** nel **piano**, le proprietà delle **rette** e dei **piani** nello **spazio** sono analoghe.

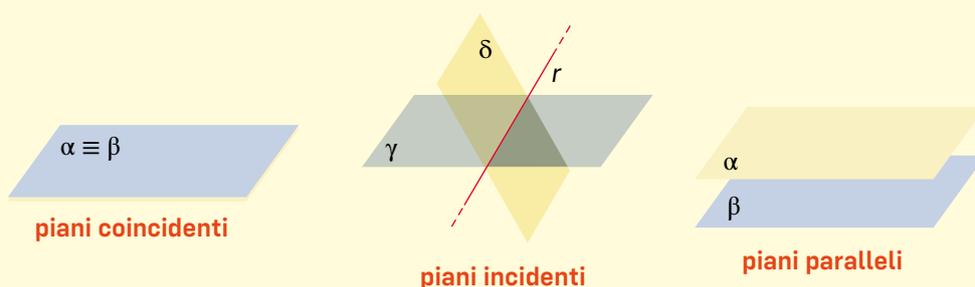
NEL PIANO	NELLO SPAZIO
Per un punto passano infinite rette.	Per una retta passano infiniti piani.
Due rette distinte o hanno un punto in comune o non ne hanno nessuno.	Due piani distinti o hanno una retta in comune o non ne hanno nessuna.
Per due punti distinti passa una sola retta.	Per due rette distinte passa al massimo un piano.

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE PIANI

➔ **definizione** Due piani che hanno tutti i punti in comune sono **coincidenti**.

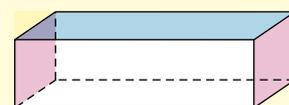
Due piani che hanno una sola retta in comune sono **incidenti**.

Due piani che non hanno punti in comune (o che sono coincidenti) sono **paralleli**.



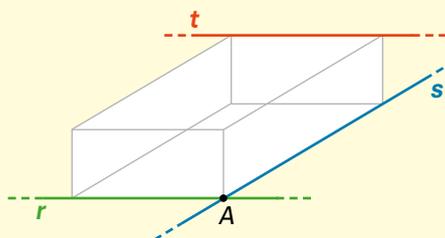
In particolare basta che due piani abbiano in comune una retta e un punto che non è sulla retta perché siano coincidenti.

ESEMPIO | Le due facce rosa del parallelepipedo stanno su due piani paralleli.
La faccia azzurra e quella rosa stanno su due piani incidenti.



POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE

Conosciamo già le posizioni reciproche di due rette che appartengono allo stesso piano. Per esempio le rette r e s si incontrano nel punto A e sono **incidenti**, oppure le rette r e t non si incontrano e sono **parallele**. Però nello spazio c'è un'altra possibilità: due rette possono non essere parallele e non incontrarsi neanche, perché non appartengono allo stesso piano, come per esempio le rette t e s . Si dice che sono **sghembe**.



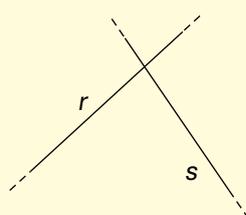
➔ **definizione** Se due rette nello spazio appartengono allo stesso piano sono **complanari**.

Se hanno tutti i punti in comune sono **coincidenti**.

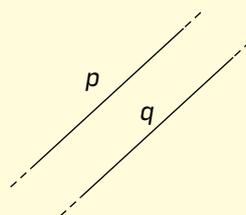
Se hanno un solo punto in comune sono **incidenti**.

Se non hanno punti in comune sono **parallele**.

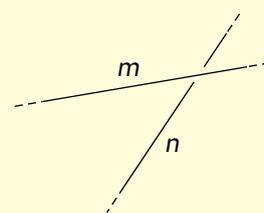
Due rette che non sono complanari sono **sghembe**.



rette incidenti



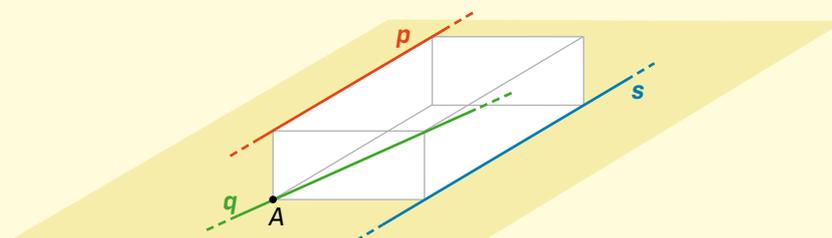
rette parallele



rette sghembe

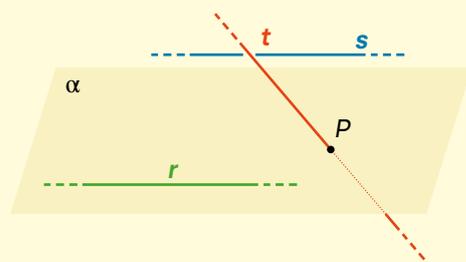
POSIZIONI RECIPROCHE DI RETTE E PIANI

Immaginiamo la figura di prima appoggiata su un piano. Osserviamo che la retta s ha tutti i punti in comune con il piano, la retta q ha in comune solo il punto A , la retta p non ha punti in comune con il piano.



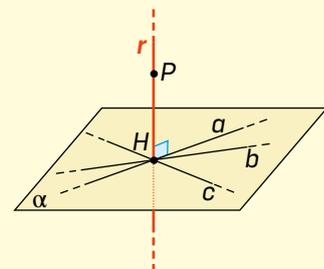
➔ **definizione** Una retta è **parallela** a un piano se giace sul piano o se non ha alcun punto in comune con esso. Una retta è **incidente** a un piano se ha un unico punto in comune con esso: il **punto di incidenza**.

La retta r giace sul piano α , la retta s è parallela al piano α , la retta t è incidente con il piano α nel punto P .



RETTE PERPENDICOLARE A UN PIANO

Tra le rette incidenti con il piano c'è il caso particolare di quelle perpendicolari: nella figura osserva per esempio la retta r .



➔ **definizione** Una retta è **perpendicolare** a un piano se è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il punto di incidenza.

Il punto di incidenza si chiama **piede** della perpendicolare ed è la **proiezione** sul piano di un qualsiasi punto della perpendicolare.

Dato che il punto P è esterno al piano la sua **distanza** dal piano è data proprio dal segmento PH .

2. FIGURE NELLO SPAZIO: I SOLIDI

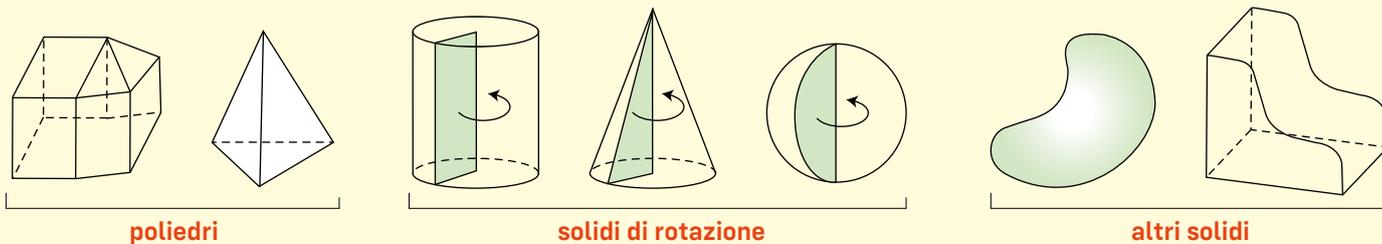
Nel piano una linea chiusa delimita una figura piana: è il caso delle spezzate semplici che delimitano i poligoni o delle circonferenze che delimitano i cerchi.

Allo stesso modo nello spazio una superficie chiusa delimita un **solido**.

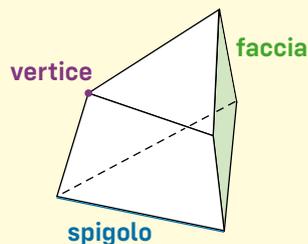
➔ **definizione** Un **solido** è la parte di spazio delimitata da una superficie chiusa.

La superficie è, nello spazio tridimensionale, l'equivalente di quello che è il contorno di una figura nel piano.

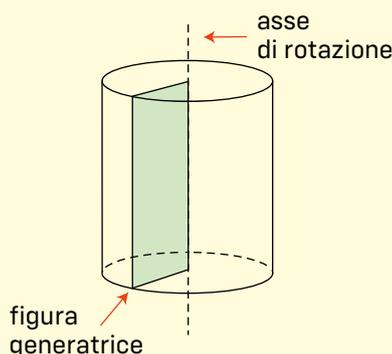
I solidi si dividono in poliedri, solidi di rotazione e altri solidi. I **poliedri** hanno la superficie composta solo da poligoni; i **solidi di rotazione** si chiamano così perché nascono dalla rotazione di una figura attorno a una retta.



Nei poliedri i poligoni che compongono la superficie si chiamano **facce**, i lati prendono il nome di **spigoli** e i loro estremi sono i **vertici**.



La superficie di un solido di rotazione, invece, non ha facce né vertici né spigoli. La figura che ruota viene detta **generatrice**; la retta attorno a cui la generatrice ruota si chiama **asse di rotazione**.



3. MISURE DEI SOLIDI

Per le figure piane consideriamo due misure complessive, il perimetro e l'area. Analogamente per le figure solide abbiamo due misure complessive: l'**area della superficie totale** (la misura di ciò che le delimita) e il **volume** (la misura dello spazio occupato).

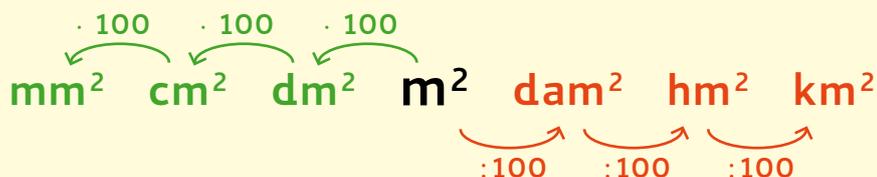
MISURA E SVILUPPO DI UNA SUPERFICIE

La prima misura significativa di un solido è quella dell'area della superficie che lo delimita, che corrisponde a quello che per le figure piane è il perimetro.

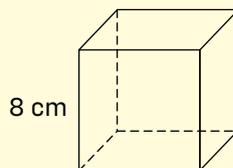
Per esempio, nel caso dei poliedri, possiamo procedere sommando le aree delle singole facce.

Trattandosi di un'area si misura in metri quadrati (o centimetri quadrati e così via).

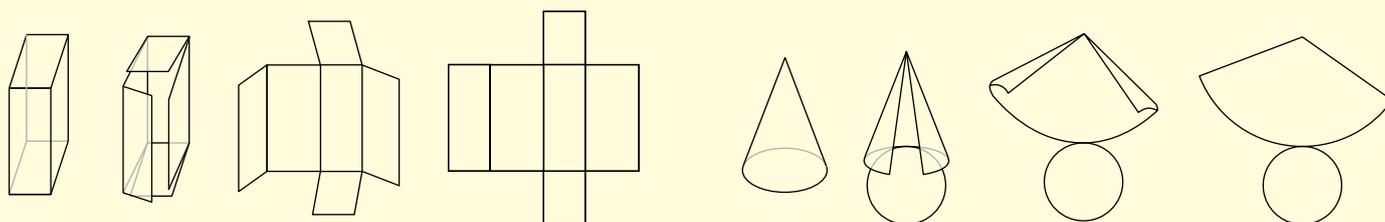
Per passare dal metro quadrato ai suoi multipli o ai suoi sottomultipli bisogna dividere o moltiplicare per **cento**:



ESEMPIO Nel caso di un cubo l'area della superficie totale è la somma delle aree dei sei quadrati che lo compongono. Se lo spigolo del cubo è lungo 8 cm, l'area di ciascun quadrato è di 64 cm^2 . L'area della superficie totale è quindi $6 \cdot 64 = 384 \text{ cm}^2$.



Per misurare meglio la superficie di un solido può essere utile "aprire" la superficie e "distenderla" su un piano (quando è possibile).



➔ **definizione** Lo **sviluppo** di una superficie è una figura che la rappresenta completamente sul piano. L'area della superficie totale è uguale all'area del suo sviluppo.

Non tutte le figure solide hanno una superficie che si può sviluppare sul piano.

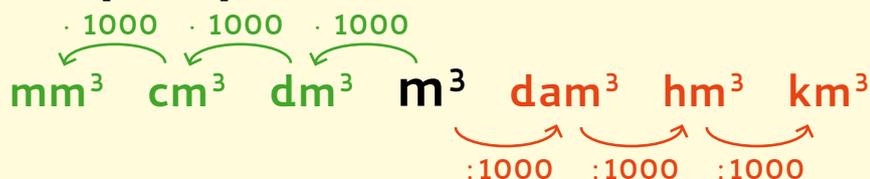
VOLUME DI UN SOLIDO

Il volume è la misura della quantità di spazio occupata da un solido. Come per tutte le misure, anche per il volume ci serve un'unità di misura. La conosciamo già: è il metro cubo.

➔ **definizione** Il **metro cubo** è il volume di un cubo che ha lo spigolo di un metro.

Il **volume** di un solido è la misura dello spazio occupato dal solido ed è il numero che esprime il rapporto tra il solido e un cubo che ha lo spigolo di un metro.

Per passare dal metro cubo ai suoi multipli o ai suoi sottomultipli bisogna dividere o moltiplicare per **mille**.



SOLIDI EQUIVALENTI

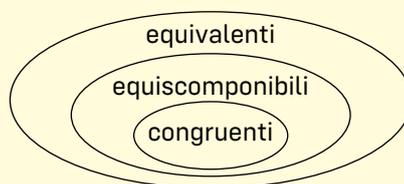
➔ **definizione** Due solidi che hanno lo stesso volume sono **equivalenti**.

Come per le figure piane, anche per i solidi non è necessario essere congruenti per essere equivalenti.

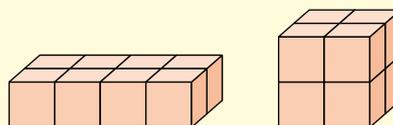
Distinguiamo tre relazioni tra due solidi:

- possono essere **congruenti**, se esiste un movimento che sovrappone l'uno all'altro;
- possono essere **equiscomponibili**, se uno si può scomporre in un certo numero di pezzi che rimessi insieme in un altro modo formano l'altro;
- possono essere **equivalenti**, se hanno lo stesso volume (anche se possono avere forme molto diverse).

Tutti i solidi congruenti sono equiscomponibili e tutti i solidi equiscomponibili sono equivalenti.



ESEMPIO | Questi due solidi sono equiscomponibili, infatti il primo si può scomporre in 8 cubetti che ricomposti danno il secondo. Si vede subito che i due solidi hanno anche lo stesso volume in quanto occupano lo stesso spazio.



4. CAPACITÀ, MASSA E DENSITÀ

➔ **definizione** La **capacità** è la quantità di liquido che un solido può contenere.

Il **litro** è l'unità di misura della capacità e corrisponde alla quantità d'acqua contenuta in un cubo di un decimetro di spigolo.

Capacità e volume sono sostanzialmente la stessa cosa ma, nella pratica, vengono usati per scopi diversi e quindi si misurano con unità di misura diverse. Si può passare da una all'altra ricordando che $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$.

➔ **definizione** La **massa** di un corpo è la quantità di materia di cui è costituito il corpo. L'unità di misura della massa è il **chilogrammo**.

Anche se nella vita quotidiana si parla preferibilmente di peso ricordiamo che la massa e il peso sono due concetti diversi.

Il peso di un corpo è la forza con cui viene attratto dalla forza di attrazione gravitazionale terrestre. È diverso sulla Luna e sulla Terra e cambia anche con l'altitudine. Sulla Terra, al livello del mare, è numericamente uguale alla massa ma, essendo una forza, si misura con il dinamometro e l'unità di misura è il Newton.

La massa di un corpo, invece, è sempre uguale. D'ora in poi parleremo solo di massa.

Capacità e massa ci forniscono un modo per stabilire quando due solidi sono equivalenti. Sono infatti equivalenti due solidi che possono essere riempiti dalla stessa quantità di liquido, o due solidi composti di uno stesso materiale e che hanno la stessa massa.

Se guardiamo corpi diversi che hanno la stessa forma e lo stesso volume, può accadere che abbiano massa diversa. A parità di volume un corpo con più massa è più denso e uno con meno massa è meno denso.

➔ **definizione** La **densità** di un materiale è il rapporto tra la massa e il volume di un solido formato da quel materiale.

L'unità di misura della densità è il chilogrammo al decimetro cubo (kg/dm^3).

Una densità di $1 \text{ kg}/\text{dm}^3$ è uguale a una densità di $1000 \text{ g}/1000 \text{ cm}^3$, quindi $1 \text{ kg}/\text{dm}^3 = 1 \text{ g}/\text{cm}^3$.

Materiale	kg/dm^3	Materiale	kg/dm^3	Materiale	kg/dm^3
Acciaio	7,9	Cemento	1,4	Marmo	2,7
Acqua (a 4 °C)	1	Cenere	0,9	Mercurio	13,6
Alluminio	2,6	Cera	0,9	Neve fresca	0,2
Argento	10,5	Diamante	3,6	Oro	19,3
Bronzo	8,9	Ferro	7,9	Ottone	8,5
Calcestruzzo	2	Ghiaccio	0,9	Piombo	11,3
Calcio	1,6	Ghiaia	1,7	Porcellana	2,4
Carta	0,9	Ghisa	7,1	Sabbia asciutta	1,5
Catrame	1,2	Gomma	1,9	Sabbia umida	2
Celluloide	1,4	Legna a ciocchi	0,3	Stagno	7,3
Cellulosa	1,5	Legno segato	0,9	Zinco	7,1