UNITÀ 16

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

1. EQUAZIONI

Osserva queste tre uguaglianze.

$$4^3 - 20 = 11 \cdot 4 \qquad 5 + 7 = -51 \qquad z^2 + 3 = 19$$

La prima è un'affermazione vera, la seconda è un'affermazione falsa e la terza non si può dire se è vera o falsa perché è una domanda.
La domanda può essere tradotta in linguaggio naturale con

Qual è il numero che elevato alla seconda e aumentato di 3 dà 19?

Per rispondere alla domanda bisogna trovare un numero sconosciuto, incognito.
Un'uguaglianza del genere si chiama **equazione** e contiene uno o più numeri sconosciuti da trovare.

definizione Un'**equazione** è un'uguaglianza in cui compare almeno una variabile, detta **incognita**.

Per esempio:

$5 \cdot a = 15$	$x = x$	$b^2 = 4$	$2^x = x^2$
$2x = y$	$x^2 + y^2 = z^2$	$2x = x - 1$	$\lvert x - y \rvert = 7$
$2^x = 8$	$\sqrt{x} = 14$	$a^4 + a^2 = 190$	$m + 2 = m - 3$

sono tutte equazioni. In alcune c'è più di una incognita.

Anche queste uguaglianze possono essere trasformate in domande:

$5 \cdot a = 15$ → *Qual è il numero che moltiplicato per* 5 *dà* 15*?*

$x = x$ → *Qual è il numero che è uguale a sé stesso?*

A questo punto si può cercare di rispondere.

SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE

Rispondere a queste domande significa trovare la **soluzione dell'equazione**.

definizione Una **soluzione** di un'equazione è un numero che, sostituito all'incognita, dà un'uguaglianza numerica vera.
Risolvere un'equazione significa trovare tutte le soluzioni, se esistono.

Per alcune equazioni è facile "indovinare" la soluzione (o almeno una delle soluzioni). Per esempio:

$5a = 15 \rightarrow a = 3$

$x = x \rightarrow x =$ **qualsiasi numero**

$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$ oppure $b = -2$

Per l'equazione $\boldsymbol{2x = y}$ le soluzioni sono coppie di numeri come (1; 2) e (4; 8). Per altre è molto più difficile, per altre ancora, come $m + 2 = m - 3$, sembra addirittura impossibile.
È chiaro che non ci si può accontentare di indovinare le soluzioni, bisogna trovare un metodo.

DOVE HA SENSO UN'EQUAZIONE

Il fatto che un'equazione abbia o no soluzione dipende anche da che tipo di numeri accettiamo come soluzioni.
Se per esempio vogliamo risolvere nell'insieme **N** l'equazione

$$\boldsymbol{2x = x - 1}$$

ci accorgiamo che non è possibile. Mentre nell'insieme **Z** la soluzione è -1.
In generale noi cercheremo sempre le soluzioni nell'insieme **R**, a meno che non sia specificato altrimenti.

2. EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Alcune equazioni sono difficili da risolvere perché coinvolgono operazioni complesse, per cui inizieremo dalle equazioni in cui le incognite sono combinate solo con addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni ed elevamenti a potenza, cioè sono uguaglianze tra polinomi.

definizione Un'**equazione algebrica** è un'equazione in cui le incognite compaiono solo nei polinomi.
Il **grado** di un'equazione è il massimo grado dei suoi monomi.

coefficienti

termini noti

incognita

$$\underbrace{13x - 2}_{\text{primo membro}} = \underbrace{638 + 5x}_{\text{secondo membro}}$$

Il polinomio a sinistra dell'uguale si chiama **primo membro** dell'equazione; quello a destra si chiama **secondo membro**.

Tra le equazioni algebriche considereremo solo quelle di primo grado. Sono **equazioni di primo grado in una incognita**:

$\boldsymbol{5a = 15}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = x}$

$\boldsymbol{2x = x - 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{m + 2 = m - 3}$

Anche $2x = y$ è di primo grado, ma coinvolge due incognite.

Nell'equazione $|x - y| = 7$ le variabili compaiono effettivamente al grado 1, ma c'è anche l'operazione di valore assoluto, per cui non è un'equazione algebrica.

Anche un'equazione come $x^2 + x - x^2 + 5x = 7$ è di primo grado, perché sommando i termini simili rimangono al massimo i termini di primo grado.

EQUAZIONI EQUIVALENTI

definizione Due equazioni che hanno le stesse soluzioni si dicono **equivalenti**.

Per esempio:

$$4x + 3 = 11 \quad \text{e} \quad 5x - 2 = 8$$

Se proviamo a risolvere le equazioni ci accorgiamo che entrambe hanno soluzione $x = 2$. Quindi, dato che hanno la stessa soluzione, le due equazioni sono equivalenti.

RISOLVERE UN'EQUAZIONE DELLA FORMA *ax* = *b*

Negli anni passati abbiamo incontrato più volte equazioni come $2x = 8$ che è un'equazione di primo grado in una incognita.
In questo caso i numeri sono facili ed è intuitivo dire che $x = 8 : 2$.
Non è un caso: tutte le equazioni di questo tipo si risolvono con una divisione.

$$13x = 52 \rightarrow x = 52 : 13 \qquad -7x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{-7} \qquad \frac{3}{4}x = \frac{1}{5} \rightarrow x = \frac{1}{5} : \frac{3}{4}$$

proprietà Per risolvere un'equazione della forma $ax = b$ (con $a \neq 0$) si divide il termine noto b per il coefficiente della x che è a.

$$ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Nei prossimi paragrafi vedremo come qualsiasi equazione algebrica di primo grado in una incognita può essere trasformata nella forma $ax = b$.

3. PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Come si fa a trasformare un'equazione per poterla scrivere in un modo che si sappia risolvere?
Queste trasformazioni devono avvenire in modo che le equazioni trasformate siano equivalenti a quella iniziale in modo da non cambiare le soluzioni.
Per fare queste trasformazioni dobbiamo seguire alcune regole chiamate **princìpi di equivalenza**.

Vediamo innanzitutto degli esempi.
La soluzione di $2x = 4$ è $x = 2$. Sostituendo puoi verificare che anche $2x - x = 4 - x$ ha la stessa soluzione. E lo stesso vale per $2x + 3 = 4 + 3$.
Questo perché abbiamo aggiunto o tolto sempre le stesse quantità.

Primo principio di equivalenza

Data un'equazione, se si **addiziona** o si **sottrae** una stessa espressione al primo e al secondo membro, si ottiene un'equazione equivalente.

ESEMPIO

L'equazione $3x + \frac{1}{2} = -x$

è equivalente a

$3x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x = -x - \frac{1}{4}x$

REGOLA DEL TRASPORTO

Partiamo dall'equazione $4x + 3 = 5x + 2$

togliamo $5x$ dai due membri $4x + 3 - 5x = 5x + 2 - 5x$

e otteniamo $4x + 3 - 5x = +2$

ovvero $-x + 3 = +2$

È come se avessimo trasportato il termine $5x$ dal secondo al primo membro, cambiandone il segno.

Togliamo 3 dai due membri $-x + 3 - 3 = +2 - 3$

e otteniamo $-x = +2 - 3$

ovvero $-x = -1$

Anche qui il termine $+3$ è stato spostato dal primo al secondo membro ed è diventato -3.

Regola del trasporto

Se in un'equazione trasportiamo un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno, si ottiene un'equazione equivalente.

La regola del trasporto funziona molto bene quando possiamo cancellare due termini che compaiono **identici** ai due membri dell'equazione.

ESEMPIO

Nell'equazione:

$5x + 10 = 3x + 16$

trasportiamo +10 al secondo membro (che è come togliere +10 da entrambi i membri) e otteniamo:

$5x = 3x + 16 - 10$

che a sua volta è equivalente a:

$5x = 3x + 6$

4. SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

C'è un altro modo di trasformare un'equazione senza cambiare la sua soluzione.

Il numero 5 è soluzione sia di $\frac{7x + 5}{4} = 10$ sia di $4 \cdot \frac{7x + 5}{4} = 4 \cdot 10$.

Moltiplicare o dividere per una stessa quantità diversa da zero i due membri di un'uguaglianza, dà ancora un'uguaglianza.

Secondo principio di equivalenza
Data un'equazione, se si **moltiplicano** o si **dividono** per uno stesso numero, diverso da zero, il primo e il secondo membro, si ottiene un'equazione equivalente.

Le equazioni $\frac{7x + 5}{4} = 10$ e $7x + 5 = 40$ hanno la stessa soluzione.

CANCELLAZIONE DEI DENOMINATORI

Il secondo principio di equivalenza è particolarmente efficace quando ci troviamo in presenza di denominatori.
Operare con le frazioni rende i calcoli più delicati per cui, se possiamo eliminare i denominatori, semplifichiamo il lavoro con l'equazione.
Se consideriamo l'equazione:

$$\frac{5}{6}x + \frac{1}{4} = \frac{7}{15}$$

come prima cosa possiamo calcolare il denominatore comune, che nel nostro caso è 60.
Per il secondo principio di equivalenza, se moltiplichiamo tutti i termini per 60 otteniamo un'equazione equivalente:

$$60 \cdot \left(\frac{5}{6}x + \frac{1}{4}\right) = 60 \cdot \frac{7}{15}$$

che diventa:

$$50x + 15 = 28$$

molto più semplice per trovare il valore dell'incognita x.

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA FORMA $ax = b$

Il secondo principio di equivalenza ci permette di vedere in un altro modo la soluzione dell'equazione nella forma $ax = b$.
Consideriamo l'equazione $12x = 42$. Possiamo "liberare" la x dividendo primo e secondo membro per 12.

$$\frac{\cancel{12}x}{\cancel{12}} = \frac{42}{12} \qquad x = \frac{7}{2}$$

Consideriamo $\frac{3}{5}x = \frac{7}{10}$ in cui moltiplichiamo primo e secondo membro per $\frac{5}{3}$.

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{3} \qquad x = \frac{7}{6}$$

REGOLA DEL CAMBIAMENTO DI SEGNO

Il secondo principio è particolarmente efficace quando dobbiamo cambiare segno ai membri di un'equazione. In questo caso moltiplichiamo per -1 entrambi i membri e otteniamo un'equazione equivalente a quella di partenza.

Regola del cambiamento di segno
Cambiando il segno a tutti i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

$$\begin{array}{rcl} -ax & = & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ ax & = & -b \end{array}$$

5. RISOLVERE UN'EQUAZIONE

definizione Risolvere un'equazione significa trovare un numero che sostituito all'incognita renda l'uguaglianza vera.

A parte i casi intuitivi, come si fa a trovare la soluzione?
Un modo per farlo è trasformare l'equazione in altre equazioni equivalenti, via via più semplici, fino a trovare prima un'equazione che si sappia risolvere, poi la soluzione o le soluzioni, se sono più di una.

Alle superiori studierai equazioni di grado superiore al primo: vedrai che i princìpi di equivalenza valgono anche per queste, ma non sempre bastano per risolvere le equazioni.

$$\frac{2}{3}x + 1 = -2x - \frac{1}{3}$$

2°principio (moltiplicando per 3)

$$2x + 3 = -6x - 1$$

1°principio (trasporto)

$$2x + 6x = -1 - 3$$

calcoli algebrici

$$8x = -4$$

soluzione della forma $ax = b$

$$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Nell'esempio l'equazione $8x = -4$ è equivalente a $\frac{2}{3}x + 1 = -2x - \frac{1}{3}$.
Quindi la soluzione $x = -\frac{1}{2}$ è soluzione anche di quella iniziale.

Secondo la definizione, un numero è soluzione se, sostituito all'incognita, dà un'uguaglianza numerica vera, indipendentemente dal modo in cui lo abbiamo trovato. Verifichiamo:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} + 1 = +1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

proprietà Per **risolvere un'equazione** – usando i princìpi di equivalenza e i calcoli algebrici – la si trasforma in un'altra equazione equivalente, poi in un'altra, finché non si arriva alla forma $ax = b$, facilmente risolvibile.
La soluzione dell'ultima equazione è anche soluzione di tutte le precedenti, compresa la prima.

6. EQUAZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE E IMPOSSIBILI

Qualsiasi equazione di primo grado in una incognita, con i princìpi di equivalenza e un po' di algebra, può essere trasformata in un' equazione della forma $\boldsymbol{ax = b}$.
Studiamo quali sono i casi che possono presentarsi.

EQUAZIONI DETERMINATE

Il coefficiente di x è diverso da zero ($a \neq 0$), si può dividere per a e l'equazione ha una soluzione che è il numero $\frac{b}{a}$.

proprietà Se $\boldsymbol{a \neq 0}$ l'equazione $\boldsymbol{ax = b}$ è **determinata** perché ha esattamente una soluzione.

ESEMPIO $\frac{3}{4}x = -2$
Dato che $a = \frac{3}{4}$ la soluzione è data da $x = \frac{b}{a} = -2 : \frac{3}{4} = -\frac{8}{3}$.
Il valore di b può anche essere uguale a zero. Per esempio $4x = 0$ ha soluzione $x = \frac{0}{4}$, cioè $x = 0$.

EQUAZIONI INDETERMINATE

Se il coefficiente di x è zero ($a = 0$) e se anche $b = 0$, l'equazione diventa $0x = 0$ e qualsiasi numero è soluzione, infatti 0 moltiplicato per qualsiasi numero dà sempre 0.

proprietà Se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$ l'equazione $\boldsymbol{ax = b}$ è **indeterminata** perché ogni numero reale è una sua soluzione.

ESEMPIO $0x = 0$
Si può sostituire alla x qualsiasi numero:
$0 \cdot 2 = 0$ $\quad 0 \cdot (-3) = 0$ $\quad 0 \cdot \frac{3}{17} = 0$ $\quad 0 \cdot \sqrt{2} = 0$

EQUAZIONI IMPOSSIBILI

Se il coefficiente di x è zero ($a = 0$) ma il termine noto è diverso da zero ($b \neq 0$), l'equazione non ha come soluzione nessun numero reale.

proprietà Se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$ l'equazione $\boldsymbol{ax = b}$ è **impossibile** perché non ha soluzioni.

ESEMPIO $0x = 5$
Nessun numero reale è soluzione perché nessun numero, moltiplicato per 0 dà 5.

Per un'equazione di primo grado in una incognita non ci sono altre possibilità: o è determinata e ha esattamente una soluzione, o è indeterminata e tutti i numeri reali sono soluzioni, o è impossibile e non ha soluzioni.