UNITÀ 15

MONOMI E POLINOMI

1. ESPRESSIONI LETTERALI

Le proprietà e i teoremi matematici sono validi per qualsiasi numero, quindi si possono scrivere usando le lettere al posto dei numeri. Spesso sono uguaglianze tra **espressioni letterali**.

$$a + b = b + a \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

La prima uguaglianza esprime la proprietà commutativa dell'addizione: al posto di a e b possiamo inserire due numeri reali qualsiasi e l'uguaglianza rimane sempre vera.
La seconda uguaglianza è la proprietà che esprime il prodotto di due potenze con la stessa base.

definizione Un'**espressione letterale** è una scrittura formata da numeri, lettere e segni di operazione.

Il segno di moltiplicazione si può anche non scrivere. Per esempio $2a$ significa $2 \cdot a$ e ab significa $a \cdot b$.

definizione Le lettere in un'espressione letterale rappresentano numeri reali qualsiasi e si chiamano **variabili**.

Ci sono diversi tipi di numeri:

- 8; −5; 7,31 sono numeri **espliciti** e **fissi**.
- π, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{17}$ sono numeri **impliciti** (perché il loro valore non è immediatamente visibile) e **fissi**.

Le lettere rappresentano numeri **impliciti** e **variabili**. Di solito una lettera rappresenta un numero reale qualsiasi, a meno che si dica altrimenti.

Si possono trovare diverse espressioni letterali che descrivono relazioni aritmetiche, geometriche o in generale scientifiche.
Può capitare che ci venga richiesto di calcolare queste espressioni.
Ma che cosa significa calcolare un'espressione?

definizione **Calcolare** significa trasformare un'espressione in un'altra equivalente.

Per calcolare un'espressione letterale si usano le stesse regole utilizzate nelle operazioni con i numeri espliciti, per esempio le proprietà delle operazioni. Teniamo però conto che dobbiamo operare con numeri impliciti, di cui non conosciamo il valore. Non sempre dai calcoli si ottiene come risultato un numero come con i numeri espliciti. Più spesso troviamo ancora un'espressione letterale. Vedremo più avanti come si fa.

Si può inoltre decidere di vedere quanto vale l'espressione letterale attribuendo valori numerici alle variabili.

definizione Tutte le volte che in un'espressione compare una specifica lettera, questa rappresenta sempre lo stesso **valore**.

Consideriamo l'espressione $1 + a + 3a^2 - a^3$.
Per trovarne il valore in corrispondenza di $a = 2$, scriviamo il numero 2 al posto di **tutte** le lettere a.

$$1 + 2 + 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 7$$

Un'espressione letterale può contenere anche due lettere:

$$b + a + ba^2 - a^3$$

Il valore numerico in corrispondenza di $a = -1$ e $b = 3$ è:

$$3 +)-1(+ 3 \cdot)-1(^2 -)-1(^3 = 6$$

Mentre quello in corrispondenza di $a = 3$ e $b = 2$ è:

$$2 + 3 + 2 \cdot 3^2 - 3^3 = -4$$

Possiamo anche trovarne il valore in corrispondenza di due numeri uguali, come $a = b = 2$. Sostituiamo ad a e b il numero 2:

$$2 + 2 + 2 \cdot 2^2 - 2^3 = 4$$

2. MONOMI

Tra tutte le espressioni letterali, in alcune sono presenti solo operazioni di moltiplicazione o elevamento a potenza, ma non di addizione algebrica né di radice quadrata o di divisione.

$$-\frac{4}{3}ax \qquad +0{,}05bcd^8$$

definizione Si chiama **monomio** un'espressione letterale costituita da un solo numero oppure da un numero moltiplicato per una o più lettere (o potenze di lettere con esponente positivo).
Il numero è il **coefficiente**, le lettere formano la **parte letterale**.

$$\underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{coefficiente}}\ \underbrace{a^2b^7}_{\text{parte letterale}}$$

Sono monomi:

$$2a \qquad -a^2b^4 \qquad 5 \qquad \frac{3}{4}mnpq \qquad 0 \qquad -\frac{1}{2}w \qquad \sqrt{2}\,t^3$$

Non sono monomi:

$$a + b \qquad 2 - x \qquad \frac{b}{a^2} \qquad 5x^{-1} \qquad \sqrt{2t^3}$$

Nell'esempio notiamo che $\frac{3}{4}$ non si considera come divisione perché è un numero fisso, anche se implicito. Lo stesso vale per $\sqrt{2}$ che non è una radice ma un numero (fisso).

MONOMI PARTICOLARI

Quando scriviamo un monomio:

- se il segno è positivo, possiamo sottintenderlo;
- se il coefficiente è 1, possiamo sottintenderlo;

$$a^2b^7$$

parte letterale

Non vedi il coefficiente? Allora è +1.

- se il coefficiente è −1, sottintendiamo il numero 1 e scriviamo solo il segno meno.

$$-a^2b^7$$

parte letterale

Davanti alla parte letterale c'è solo un −? Allora il coefficiente è −1.

Alcuni monomi hanno solo il coefficiente e non hanno la parte letterale: sono solo numeri (come quelli che puoi riconoscere negli esempi visti prima).
Se un monomio è solo numerico, possiamo immaginare che abbia la parte letterale elevata a zero.

GRADO DI UN MONOMIO

Ogni elemento della parte letterale è una potenza (eventualmente con esponente 1): ogni lettera è un fattore che compare tante volte quante sono indicate dal suo esponente.

definizione Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti di tutte le sue lettere. Il grado di un monomio rispetto a una lettera è l'esponente di quella lettera. Un monomio numerico ha grado 0.

Per esempio, il monomio:

$$-3ab^4c^2$$

ha grado **1** + **4** + **2** = 7.

Il monomio ha grado **1** rispetto alla lettera a, **4** rispetto alla b, **2** rispetto alla c.

3. MONOMI SIMILI E SOMMA DI MONOMI

MONOMI SIMILI

definizione Due monomi che hanno la stessa parte letterale sono **simili**.

Due monomi simili hanno lo stesso grado:

$$4x^2y \qquad \text{e} \qquad -\frac{17}{3}x^2y$$

Due monomi simili che hanno lo stesso coefficiente sono **uguali**.
I monomi:

$$-a^3b \qquad \text{e} \qquad 4a^3b^2$$

non sono simili, perché non basta che abbiano le stesse lettere, ma anche gli esponenti devono essere uguali.
I monomi:

$$t^2s^4 \text{ e } a^3b^2c$$

hanno lo stesso grado ma non sono simili.

Due monomi simili che hanno coefficiente opposto sono **opposti**.

$$-3ab^4c^2 \qquad \text{e} \qquad 3ab^4c^2$$

Attenzione! Non ha senso parlare di segno di un monomio.
Non è vero che il monomio $-3ab^4c^2$ è negativo e il monomio $3ab^4c^2$ è positivo, perché il segno della parte letterale dipende da quello delle lettere, e cambia a seconda dei valori che si assumono.

SOMMA DI MONOMI

La somma algebrica di monomi è un'espressione letterale.
Se i monomi addendi sono simili, scriviamo la somma algebrica dei coefficienti davanti alla stessa parte letterale.

$$3ab^4c^2 - 8ab^4c^2 = (3 - 8)ab^4c^2 = -5ab^4c^2$$

Se i monomi addendi non sono simili, lasciamo indicata la somma e la chiamiamo **polinomio**.

$$3ab^4c^2 - 8ab^3c^5$$

Mono vuol dire *uno solo*, un monomio ha quindi un solo addendo.
Poli vuol dire *molti*, un polinomio ha molti (o almeno alcuni) addendi.
I monomi sono polinomi con un solo termine.

4. PRODOTTO, POTENZA E DIVISIONE DI MONOMI

Per moltiplicare, elevare e dividere monomi ricorda le proprietà delle potenze.

Moltiplicazione di potenze con basi uguali	Potenza di potenza	Divisione di potenze con basi uguali
$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$

PRODOTTO DI MONOMI

proprietà Per **moltiplicare due monomi** si moltiplicano tra loro i coefficienti (usando anche la regola dei segni) e poi le parti letterali, sommando gli esponenti delle lettere uguali.
Il risultato è sempre un monomio.

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right) \cdot (+6bc^2)$$

prodotto dei coefficienti

somma degli esponenti di b

$$-9a^2b^4c^2$$

Per esempio la moltiplicazione di monomi:

$$(-2ab^2) \cdot \left(-\frac{3}{2}a^3c\right) = (-2) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) a^{1+3}b^2c = 3a^4b^2c$$

POTENZA DI UN MONOMIO

proprietà Per calcolare la **potenza di un monomio** si eleva a potenza il coefficiente e si moltiplicano tutti gli esponenti delle lettere per l'esponente della potenza.
Se la potenza ha esponente positivo il risultato è ancora un monomio.

$$\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)^2$$

prodotto degli esponenti per 2

$$+\frac{4}{9}a^4b^6$$

Per esempio eleviamo al quadrato il monomio:

$$\left(-\frac{2}{5}a^3b^2c\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 a^{3\cdot 2}b^{2\cdot 2}c^2 = +\frac{4}{25}a^6b^4c^2$$

DIVISIONE DI MONOMI

proprietà Per **dividere due monomi** si dividono tra loro i coefficienti e poi le parti letterali, sottraendo gli esponenti delle lettere uguali.
Il risultato non è sempre un monomio. Lo è solo quando il primo monomio contiene tutte le lettere del secondo con esponenti maggiori o uguali.
In questo caso si dice che il primo monomio è **divisibile** per il secondo.

La divisione si può anche scrivere come frazione semplificando i fattori del numeratore e del denominatore:

$$(\mathbf{6\,a^5}) : (\mathbf{3\,a^2})$$

Dato che ci sono le stesse lettere si sottraggono gli esponenti:

$$(6a^5) : (3a^2) \; = \; (6 : 3) \cdot (a^5 : a^2) \; = \; 2 \cdot a^{5-2} \; = \; 2a^3$$

Oppure:

$$\frac{6a^5}{3a^2} \; = \; \frac{6 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{3 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} \; = \; 2 \cdot a \cdot a \cdot a \; = \; 2a^3$$

Attenzione, le parentesi attorno al divisore $3a^2$ sono necessarie.
Infatti se scrivessimo $(6a^5) : 3a^2$ sarebbe uguale a $[(6a^5) : 3]a^2$ oppure $\frac{6a^5}{3}\,a^2$ e avrebbe $2a^7$. Le parentesi attorno al dividendo non sono necessarie e le scriviamo solo per chiarezza.

Il quoziente di due monomi simili è un numero:

$$(-6\,a^3) : (-4\,a^3) \; = \; (-6) : (-4)\,a^{3-3} \; = \; +\frac{3}{2}a^0 \; = \; \mathbf{\frac{3}{2}}$$

Oppure:

$$\frac{-6a \cdot a \cdot a}{-4a \cdot a \cdot a} \; = \; \mathbf{\frac{3}{2}}$$

Se nel dividendo ci sono lettere in più si riscrivono:

$$(4\,a\,b^3) : (-8\,b^2) \; = \; -(4 : 8)\,a\,b^{3-2} \; = \; -\frac{1}{2}ab$$

Oppure:

$$\frac{4\,a\,b^3}{-8\,b^2} \; = \; -\frac{4}{8}\;\frac{a \cdot b \cdot b \cdot b}{b \cdot b} \; = \; -\frac{1}{2}ab$$

Se nel divisore ci sono esponenti maggiori si ottengono esponenti negativi:

$$\left(\frac{1}{2}a^2 b\right) : (3\,a\,b^2) \; = \; \left(\frac{1}{2} : 3\right) a^{2-1}\,b^{1-2} \; = \; \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) a \cdot b^{-1} \; = \; \frac{1}{6}\,\frac{a}{b}$$

Oppure:

$$\left(\frac{1}{2} : 3\right) \frac{a \cdot a \cdot b}{a \cdot b \cdot b} \; = \; \frac{1}{6}\,\frac{a}{b} \; = \; \frac{a}{6b}$$

Se nel divisore ci sono lettere in più si riscrivono con l'esponente negativo:

$$\left(-\frac{4}{5}a^3 b\right) : (-6abc) \; = \; \left(\frac{4}{5} : 6\right) a^{3-1}\,b^{1-1}\,c^{0-1} \; = \; \frac{2}{15}\,a^2\,c^{-1}$$

Oppure:

$$\left(-\frac{4}{5}\right) : (-6)\,\frac{a \cdot a \cdot a \cdot b}{a \cdot b \cdot c} \; = \; +\frac{2}{15}\,\frac{a^2}{c} \; = \; \frac{2\,a^2}{15c}$$

Negli ultimi due casi il risultato **non è un monomio**.

5. POLINOMI

definizione Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi oppure un singolo monomio.
I monomi che formano il polinomio si chiamano **termini**.

Quando consideriamo un polinomio può succedere che siano presenti più monomi simili: in questo caso è consigliabile sommarli tra di loro per ridurre il polinomio alla sua forma più semplice che si chiama **forma normale**.

definizione In un polinomio in forma normale non compaiono **monomi simili** tra loro.

Per esempio $-9x + 4xy - y + 8x$ ha quattro termini, ma dopo aver sommato tra loro i due monomi simili in x ci accorgiamo che può essere scritto con solo tre termini: $-x + 4xy - y$.

Sono polinomi:

$$2 + a + ab \qquad xyz + x^2y + xy^2 + 5 \qquad \frac{3}{7}abc^3 \qquad -4$$

Non sono polinomi:

$$-2\frac{x}{y} \qquad a^2 + a + 1 + a^{-1} \qquad \frac{axb + cy}{2xy - c}$$

- Un polinomio costituito da un solo termine è un **monomio**.
- Un polinomio costituito da due termini si chiama **binomio**.
- Un polinomio costituito da tre termini si chiama **trinomio**.
- Un polinomio costituito da quattro termini si chiama **quadrinomio**.

Polinomi che hanno più addendi non hanno nomi specifici.

Una volta che abbiamo scritto un polinomio in forma normale possiamo determinare il suo **grado**.

definizione Il **grado di un polinomio** scritto in forma normale è il grado massimo tra quelli dei suoi termini.
Il **grado di un polinomio rispetto a una lettera** è il grado massimo dei suoi termini rispetto a quella lettera.

In un polinomio, il termine di grado zero si chiama **termine noto**.
I numeri sono polinomi di grado zero.

6. PRIME OPERAZIONI TRA POLINOMI

SOMMA DI POLINOMI

definizione L'**opposto** di un polinomio è il polinomio con tutti i segni cambiati.

Per esempio, l'opposto di

$(-4a + 2b)$ è $-(-4a + 2b) = +4a - 2b$

proprietà Per sommare due polinomi si tolgono le parentesi, tenendo conto dei segni davanti a esse, poi si sommano i termini simili.

Come nel caso dei monomi togliamo le parentesi e quindi sommiamo i monomi simili.
Se davanti alla parentesi c'è un segno + si riscrive il polinomio così com'è:

$$(-5ab^3 + 2a^3b) + (-2ab^3 - a^3b) =$$
$$= -5ab^3 + 2a^3b - 2ab^3 - a^3b =$$
$$= -7ab^3 + a^3b$$

Se davanti alla parentesi c'è un segno − significa che stiamo prendendo l'opposto del polinomio, quindi cambiamo tutti i segni:

$$-(-2xy + y^2) + (-xy - 3y^2) =$$
$$= +2xy - y^2 - xy - 3y^2 =$$
$$= +xy - 4y^2$$

PRODOTTO DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Quando moltiplichiamo un polinomio per un monomio, se non possiamo dare la precedenza alle operazioni nella parentesi, usiamo la proprietà distributiva. Infatti il polinomio è un'addizione moltiplicata per un fattore (il monomio).

$$(\boldsymbol{x^2 + 2x - 3}) \cdot \boldsymbol{xy} =$$
$$= x^2 \cdot xy + 2x \cdot xy - 3 \cdot xy =$$
$$= x^3y + 2x^2y - 3xy$$

proprietà Per **moltiplicare un polinomio per un monomio** si moltiplica ogni termine del polinomio per il monomio.

$$\boldsymbol{-3a^2} \cdot (\boldsymbol{2 + 3ab - 5b}) =$$
$$= -6a^2 - 9a^3b + 15a^2b$$

Se nella parentesi si possono svolgere delle operazioni è meglio eseguirle prima di procedere con la moltiplicazione:

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right) \cdot 7} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right) \cdot 7 = -\frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{4}x$$

RACCOGLIERE UN TERMINE

Mentre nel calcolo numerico il risultato (anche di una espressione lunga) è sempre un unico numero, nel calcolo letterale si trasforma un'espressione in un'altra, a seconda di quello che è più utile per proseguire.

A volte, per esempio, può essere utile "disfare" il prodotto di un polinomio per un monomio:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$$

Se leggiamo questa uguaglianza al contrario possiamo "tornare indietro". Per farlo dobbiamo riconoscere che c è un fattore in comune tra ac e bc e possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

Per esempio nel polinomio:

$$2a^2b^3 - 4ab^4 + 6a^3b^2c$$

i fattori comuni, cioè quelli presenti in tutti i monomi, sono 2, a, e b^2, quindi possiamo raccoglierli e lasciare nella parentesi i fattori che rimangono di ogni monomio:

$$2a^2b^3 - 4ab^4 + 6a^3b^2c = 2ab^2 \cdot (ab - 2b^2 + 3a^2c)$$

7. PRODOTTO, POTENZA E DIVISIONE DI POLINOMI

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

Nella moltiplicazione di due polinomi usiamo due volte la proprietà distributiva.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) =$$

Prima consideriamo $(a + b)$ come un unico blocco e applichiamo la proprietà distributiva su $(c + d)$.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d} =$$

Poi applichiamo la proprietà distributiva in entrambe le moltiplicazioni di $a + b$ per un monomio.

$$= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$$

Osservando l'ultimo passaggio vedi che i termini a e b del primo polinomio sono stati moltiplicati per i termini c e d del secondo.

proprietà Per **moltiplicare due polinomi** si moltiplica ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Per esempio:

$$(3x - 2y) \cdot (4x + 5y) =$$

$$= 3x \cdot 4x - 2y \cdot 4x + 3x \cdot 5y - 2y \cdot 5y =$$

$$= 12x^2 - 8yx + 15xy - 10y^2 = 12x^2 + 7xy - 10y^2$$

Se si moltiplicano due binomi si devono fare quattro moltiplicazioni; se si moltiplicano un trinomio per un binomio occorrono sei moltiplicazioni e così via.

POTENZA DI UN POLINOMIO

Per calcolare la potenza (con esponente positivo) di un polinomio ci si basa sulla definizione come prodotto ripetuto e si usa la moltiplicazione di polinomi.

$$\boldsymbol{(a + 2b - c)^2} =$$
$$= (a + 2b - c) \cdot (a + 2b - c) =$$
$$= a^2 + 2ab - ac + 2ab + 4b^2 - 2bc - ac - 2bc + c^2$$

I calcoli possono essere molti (per il quadrato di un trinomio si fanno 9 moltiplicazioni, per il cubo 27 ecc.). Per alcune potenze ci sono scorciatoie, che studierai alle superiori, che permettono di fare i calcoli più rapidamente.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Abbiamo visto che un monomio è divisibile per un altro monomio se nel primo compaiono tutte le lettere del secondo con esponenti maggiori o uguali.
Se tutti i termini di un polinomio sono divisibili per un monomio, allora anche il polinomio lo è.

proprietà Per dividere un **polinomio per un monomio** si divide ogni termine del polinomio per il monomio.

Per esempio:

$$\boldsymbol{(25x^2 - 15xy^2) : (5x)} =$$
$$= (25x^2 y) : (5x) - (15xy^2) : (5x) =$$
$$= 5xy - 3y^2$$

Esiste anche la divisione fra polinomi, ma studierai anche questa alle superiori.