UNITÀ 14

NUMERI POSITIVI E NEGATIVI

1. NUMERI REALI

Alcune sottrazioni, lo sappiamo, non hanno differenza nei numeri naturali. È per questo che ci sono i numeri negativi.
I numeri negativi si usano, per esempio, per indicare le temperature che possono essere positive o negative: +12 °C, −4,3 °C. E lo stesso succede con i crediti che sono positivi (+3000 €) e con i debiti che sono negativi (−2500 €).

I **numeri negativi** si scrivono con il **segno meno** (**−**), i **numeri positivi** si scrivono con il **segno più** (**+**), che però si può anche non indicare.
Lo zero non è né positivo né negativo e per questo non ha il segno.

Per indicare sia i numeri positivi sia i numeri negativi si può dire, **numeri relativi**. Per esempio, si parla di numeri interi relativi e di numeri razionali relativi.

Il termine "relativi" significa "sia positivi sia negativi" e deriva dal fatto che il valore dei numeri è "relativo" al segno.
Se per indicare un numero reale qualsiasi usiamo una lettera $a \in \mathbf{R}$, il numero può essere sia positivo sia negativo, anche se il segno non è visibile.

I numeri che abbiamo studiato negli anni passati sono di vari tipi, e tutti possono essere sia negativi sia positivi, tranne i numeri naturali:

- Naturali $\mathbf{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\dots\}$
- Interi $\mathbf{Z} = \{\dots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\dots\}$
- Razionali $\mathbf{Q} = \left\{\dots;\ 0{,}9;\ 0{,}\overline{8};\ -25;\ \frac{4}{3};\ -\frac{5}{4};\ 3{,}15\overline{79};\dots\right\}$
- Reali $\mathbf{R} = \left\{\dots;\ -6{,}8;\ -3;\ -3{,}\overline{80};\ -100;\ \sqrt{2};\ -\sqrt[3]{13};\ -3{,}14;\ -\pi;\ \pi;\dots\right\}$

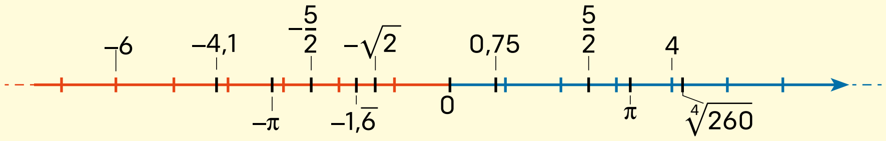
Per indicare la differenza tra numeri positivi e numeri negativi, scriviamo l'insieme dei numeri reali **R** come l'unione dei due sottoinsiemi dei numeri reali positivi $\mathbf{R}^+$ e dei numeri reali negativi $\mathbf{R}^-$ con l'aggiunta dello zero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^-$$

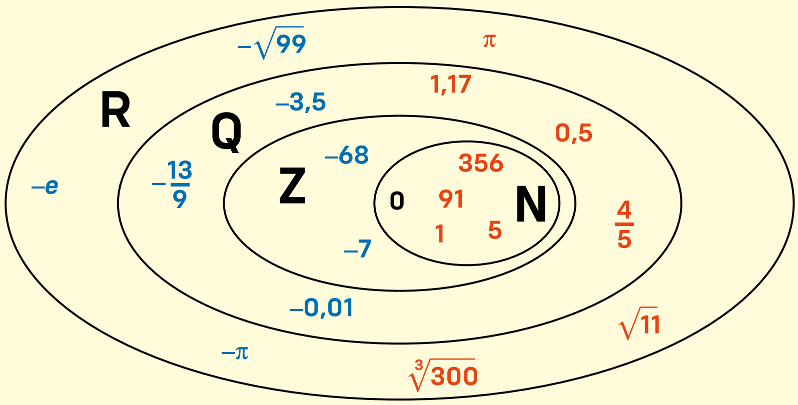
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Tutti i numeri reali possono essere rappresentati sulla retta numerica e, viceversa, ogni punto della retta numerica rappresenta un numero reale.

Sulla retta numerica, l'insieme $\mathbf{R}^+$ è rappresentato dalla semiretta alla destra dell'origine, l'insieme $\mathbf{R}^-$ dalla semiretta alla sua sinistra.



Un'altra rappresentazione degli insiemi numerici è data dal diagramma di Venn:



2. NUMERI OPPOSTI E VALORE ASSOLUTO

Ciascun numero ha sulla retta numerica un **opposto** rispetto all'origine.

definizione Due numeri sono **opposti** se la loro somma è 0.

segno → $-\sqrt{2}$ ← **parte numerica**

Gli opposti formano una coppia, uno dei due è positivo, l'altro è negativo. La parte numerica di entrambi è la stessa.

$$+3 \text{ e } -3 \qquad +0{,}2 \text{ e } -0{,}2 \qquad +\frac{1}{4} \text{ e } -\frac{1}{4} \qquad +\sqrt{5} \text{ e } -\sqrt{5}$$

Il segno meno trasforma un numero nel suo opposto.

$-(+2) \rightarrow$ l'opposto di $+2$ è -2

$-(-5) \rightarrow$ l'opposto di -5 è $+5$

Prendiamo un numero reale $a \in \mathbf{R}$: con $-a$ si indica "opposto di a".

- Se $a > 0$ allora $-a$ è negativo.
- Se $a < 0$ allora $-a$ è positivo, perché è l'opposto di un numero negativo.

Il segno meno può essere considerato come un "operatore di passaggio all'opposto".

definizione Il **valore assoluto** trasforma un numero (diverso da 0) in positivo.
Il valore assoluto di un numero positivo è il numero stesso.
Il valore assoluto di un numero negativo è l'opposto del numero.

- Se $a > 0$ allora $|a| = a$
- Se $a < 0$ allora $|a| = -a$ (l'opposto di a)
- Se $a = 0$ allora $|a| = 0$

ESEMPIO $+\sqrt{12}$ è positivo $\rightarrow$ $|+\sqrt{12}| = +\sqrt{12}$
$-1{,}32$ è negativo $\rightarrow$ $|-1{,}32|$ = opposto di $-1{,}32 = +1{,}32$
In pratica il valore assoluto di un numero lo fa diventare positivo conservando la stessa parte numerica.

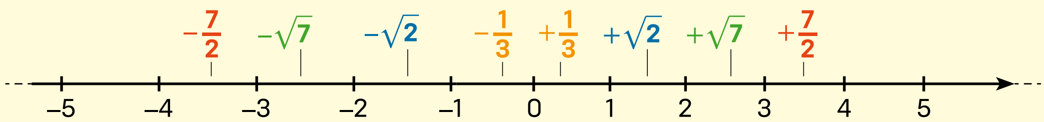
definizione Due numeri che sono entrambi positivi o entrambi negativi si dicono **concordi**. Due numeri uno positivo e l'altro negativo si dicono **discordi**.

$+4$ e $+\frac{8}{7}$ sono **concordi**.

-4 e $+\frac{8}{7}$ sono **discordi**.

$+\frac{8}{7}$ e $-\frac{8}{7}$ sono **opposti**.

Sulla retta numerica i numeri opposti sono simmetrici rispetto all'origine.



Il valore assoluto indica la distanza dall'origine, cioè dallo 0.

Per confrontare due numeri reali, è comodo guardare la retta numerica: **di due numeri sulla retta numerica è maggiore quello più a destra**. In particolare:

- 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.
  $-3 < 0 < +7{,}2$
- Un numero positivo è maggiore di un numero negativo.
  $-\frac{4}{5} < +1{,}34$
- Tra due numeri positivi è maggiore quello con il valore assoluto maggiore.
  $+5{,}6 < +7{,}3$
- Tra due numeri negativi è maggiore quello con il valore assoluto minore.
  $-4{,}8 < -1{,}56$

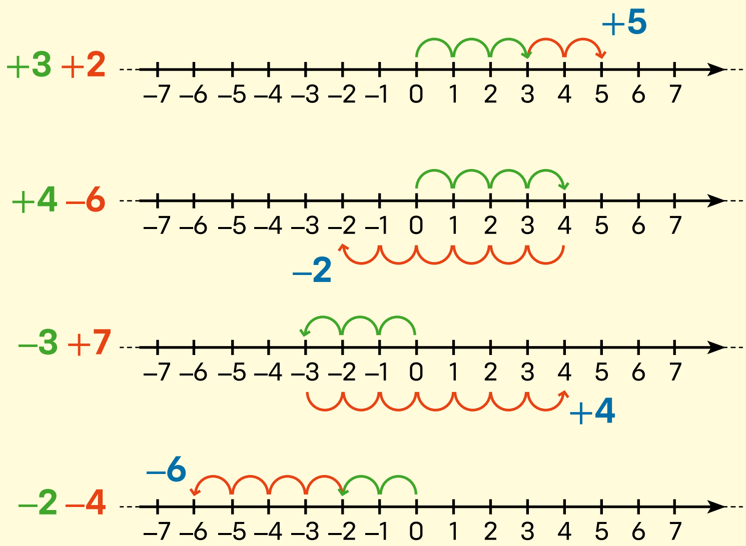
 PDF AL

3. ADDIZIONE ALGEBRICA

Quando facciamo i calcoli con i numeri reali, addizione e sottrazione diventano un'unica operazione, che si chiama **addizione algebrica.**

CON I NUMERI INTERI

Per operare con i numeri interi è sufficiente ricordare che si parte da 0: con il **segno più** ci si muove verso **destra**, con il **segno meno** ci si muove verso **sinistra**. Il punto di arrivo è il risultato.



Se alcuni numeri sono tra parentesi, si possono togliere le parentesi ricordando che il + non trasforma alcun numero, mentre il – trasforma un numero nel suo opposto.

$$(+5) + (+3) = 5 + 3 \qquad (+5) - (+3) = 5 - 3$$

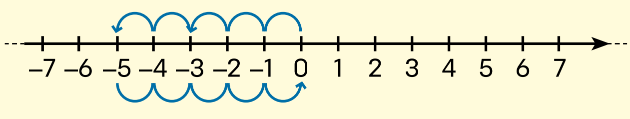
$$(+5) + (-3) = 5 - 3 \qquad (+5) - (-3) = 5 + 3$$

$$(-5) + (+3) = -5 + 3 \qquad (-5) - (+3) = -5 - 3$$

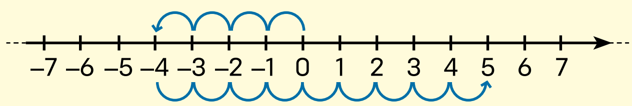
$$(-5) + (-3) = -5 - 3 \qquad (-5) - (-3) = -5 + 3$$

ESEMPIO

$(-3) + (-2) - (-5) = -3 - 2 + 5 = 0$



$-4 - (-9) = -4 + 9 = +5$



CON LE FRAZIONI

Per operare con le frazioni procediamo come con le frazioni positive, scrivendo al numeratore ogni numero con il suo segno:

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{5-12}{15} = -\frac{7}{5} \qquad -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-3+2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Attenzione! Il meno NON va davanti alla frazione $-\frac{3+2}{4}$ ma solo davanti al 3.

La **somma algebrica** è un'operazione che unisce addizione e sottrazione perché sottrarre un numero è la stessa cosa che addizionare il suo opposto.

$$\underset{\text{sottrazione}}{4 - 2} = 4 \underset{\text{addizione}}{+} \overset{\text{opposto}}{(-2)}$$

Anche per la somma algebrica vale la **proprietà commutativa** purché ogni numero porti con sé il proprio segno:

$$-5 + 3 = +3 -5$$

4. MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

MOLTIPLICAZIONE

Come si moltiplicano due numeri relativi?

Se i numeri sono **entrambi positivi** il risultato è quello che ben conosciamo:

$$(+2) \cdot (+4) = +8$$

Se **uno dei due numeri è negativo**, possiamo sempre pensare a un'addizione ripetuta:

$$(+2) \cdot (-4) = \textbf{due volte } (-4) = (-4) + (-4) = -8$$

$$(-2) \cdot (+4) = \textbf{quattro volte } (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$$

E se i numeri sono **entrambi negativi**? Non ha più senso parlare di "volte". Ci vuole una regola nuova.

$$(-2) \cdot (-4) = +8$$

Perché questa regola è vera?
Scopriamolo calcolando

$(-4) \cdot [(-2) + (+2)]$

in due modi diversi.
La prima volta cominciamo facendo i calcoli nella parentesi quadra:

$(-4) \cdot [(-2) + (+2)] = (-4) \cdot [-2 + 2]$

Dato che $-2 + 2 = 0$, tutta l'espressione fa 0

$(-4) \cdot [(-2) + (+2)] = 0$

La seconda volta distribuiamo la moltiplicazione:

$(-4) \cdot [(-2) + (+2)] = (-4) \cdot (-2) + (-4) \cdot (+2)$

In questo caso sappiamo già che $(-4) \cdot (+2) = -8$.
Allora l'espressione diventa questa:

$(-4) \cdot [(-2) + (+2)] = (-4) \cdot (-2) - 8$

Il punto di partenza è uno solo e quindi i due risultati sono uguali:

$(-4) \cdot (-2) - 8 = 0$

Quanto vale allora $(-4) \cdot (-2)$? È l'opposto di -8, cioè è $+8$.

proprietà Per moltiplicare **due numeri relativi** si moltiplicano le parti numeriche e si determina il segno con la **regola dei segni**.

$+ \cdot + = +$	**Regola dei segni**
$+ \cdot - = -$	
$- \cdot + = -$	
$- \cdot - = +$	

Anche nell'insieme dei numeri relativi **il numero 0 è l'elemento assorbente** e **il numero 1 è l'elemento neutro** della moltiplicazione.
Analogamente, valgono le altre proprietà della moltiplicazione: commutativa, associativa, distributiva, esistenza dell'inverso (tranne che per lo 0).

INVERSO DI UN NUMERO

Come tra le frazioni, ogni numero relativo **diverso da zero** ha un inverso e lo calcoliamo allo stesso modo, cioè "capovolgendolo".

proprietà L'**inverso** di un numero relativo diverso da zero è il numero relativo che ha come parte numerica l'**inverso della parte numerica** e come segno lo **stesso segno** del numero.

Il prodotto di un numero per il suo inverso deve essere $+1$, quindi i due numeri devono avere lo stesso segno.

ESEMPIO

L'inverso di -3 è $-\frac{1}{3}$.

L'inverso di $-\frac{4}{5}$ è $-\frac{5}{4}$.

L'inverso di -1 è -1.

DIVISIONE

Dato che la divisione non è altro che la moltiplicazione per l'inverso, anche per la divisione vale la regola dei segni.

proprietà Per **dividere** due numeri relativi si dividono le parti numeriche e si applica la **regola dei segni**.

Se i numeri sono frazioni, moltiplichiamo la prima frazione per l'inversa della seconda.

ESEMPIO

$(-18) : (+6) = -(18 : 6) = -3$

$\left(-\frac{22}{5}\right) : \left(-\frac{9}{10}\right) = \left(-\frac{22}{5}\right) \cdot \left(-\frac{10}{9}\right) = +\frac{44}{9}$

$(+15) : \left(-\frac{20}{7}\right) = (+15) \cdot \left(-\frac{7}{20}\right) = -\left(15 \cdot \frac{7}{20}\right) = -\frac{21}{4}$

5. ELEVAMENTO A POTENZA

POTENZA CON BASE NEGATIVA ED ESPONENTE POSITIVO

Una potenza con base negativa è sempre il prodotto della base per sé stessa con tanti fattori quanti ne indica l'esponente.

$$(-6)^2 = (-6) \cdot (-6)$$

$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$$

Siccome si applica la regola dei segni, il segno del risultato dipende dall'esponente: se l'esponente è pari, il segno della potenza è positivo, se è dispari, è negativo.

$$(-6)^2 = +36$$

$$(-6)^3 = -216$$

proprietà Per elevare a potenza una base negativa si eleva la parte numerica con segno **+** se l'esponente è pari, con segno **–** se è dispari.

Naturalmente se la base è positiva le potenze sono tutte positive.

Un caso particolare è costituito dalle potenze di -1.

$$(-1)^2 = +1$$

$$(-1)^3 = -1$$

$$(-1)^4 = +1$$

$$(-1)^5 = -1$$

POTENZA CON ESPONENTE NEGATIVO

Individuiamo con un esempio quale può essere il significato di una potenza con esponente negativo.

$$4^{-3} = 4^{2-5} = 4^2 : 4^5 = \frac{4^2}{4^5} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4^3}$$

Quindi:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} \quad \text{che è anche uguale a} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Possiamo rifare questo stesso calcolo sostituendo a 4 un numero negativo, un numero decimale, una frazione.

Analizziamo come stiamo procedendo.

- La base viene scambiata con il proprio inverso.
  Attenzione! Il suo segno non cambia.
- L'esponente viene scambiato con il proprio opposto.
  Attenzione! La sua parte numerica non cambia.

proprietà Per elevare un numero a un esponente negativo si inverte la base e si eleva all'opposto dell'esponente

$$a^{-n} = \left(\underset{\text{reciproco della base}}{\frac{1}{a}}\right)^{\overset{\text{opposto dell'esponente}}{n}}$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Per le potenze di numeri relativi valgono le stesse proprietà viste per i numeri positivi.

- Moltiplicazione (divisione) di potenze con basi uguali: si lascia la stessa base e si sommano (sottraggono) gli esponenti, anche se sono numeri negativi.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

- Potenza di potenza: si lascia la stessa base e si moltiplicano gli esponenti.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Moltiplicazione (divisione) di potenze con esponenti uguali: si moltiplicano (dividono) le basi e si lascia lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n$$

- Anche con base negativa, se l'esponente è 0 il risultato è 1.

$$a^0 = 1 \qquad -a^0 = 1$$

6. POTENZE DI 10 E NOTAZIONE SCIENTIFICA

NUMERI GRANDI

Abbiamo già visto che le potenze di 10 possono essere utilizzate per facilitare la scrittura di numeri molto grandi. Ricordiamo che:

$$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10 \qquad 10^2 = 100 \qquad 10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zeri}}$$

Queste potenze si usano per scrivere in forma abbreviata (e di solito approssimata) numeri grandi e molto grandi.

definizione Un numero è in **notazione scientifica** quando è scritto come il prodotto di una potenza di 10 per un numero compreso tra 1 (incluso) e 10 (escluso). Questo numero prende il nome di **parte significativa**.

Di solito la parte significativa ha solo due o tre cifre. Se nel numero da scrivere ce ne sono di più si arrotonda. Per trovare l'esponente basta contare le cifre dopo la prima:

$$1\underbrace{37\,000}_{5 \text{ cifre}} = 1{,}37 \cdot 10^5$$

Per arrotondare ai centesimi si deve guardare la cifra successiva alla prima dopo la virgola.
Se è compresa tra 0 e 4, si lascia la cifra dei centesimi:

$2{,}484\ldots \simeq 2{,}48.$

Se è compresa tra 5 e 9, si aumenta la cifra dei centesimi di 1:

$0{,}516\ldots \simeq 0{,}52.$

ESEMPIO Distanza media Terra-Sole: 149 597 870 km $1{,}5 \cdot 10^8$ km
Età della Terra: 4 543 000 000 = $4{,}543 \times 10^9$ anni

NUMERI PICCOLI

Dato che le potenze con esponente negativo si calcolano invertendo la base, le potenze di 10 con esponente negativo sono:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001\ldots \qquad 10^{-n} = \frac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zeri}}} = 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zeri}}\,1$$

Queste potenze si possono usare per scrivere i numeri decimali in forma polinomiale:

$$148{,}026 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

Usiamole per scrivere numeri piccoli in notazione scientifica. Siccome:

$$0,03 = 3 \cdot 0,01$$

sostituendo 0,01 con la potenza di 10 abbiamo

$$0,03 = 3 \cdot 10^{-2}$$

L'esponente è dato dal numero di posti di cui si deve spostare la virgola per avere un numero compreso tra 0 e 10.
Se il numero ha più cifre:

$$0,\underbrace{0004}_{\text{4 posti}}57 = 4,57 \cdot 10^{-4}$$

ESEMPIO Dimensioni dell'acaro della polvere: 0,00025 m = $2,5 \cdot 10^{-4}$ m
Dimensioni del virus dell'influenza: 0,0000002 m = $2 \cdot 10^{-7}$ m

7. RADICI

La radice quadrata di 36 è quel **numero positivo** che elevato alla seconda dà 36.

$$\sqrt{36} = +6 \quad \text{perché} \quad (+6)^2 = 36$$

E la radice quadrata di −36? Dovrebbe essere un numero che elevato alla seconda dà −36. Ma nessun numero reale, elevato alla seconda, può dare un numero negativo, infatti:

$$(-6)^2 = +36 \qquad \text{e} \qquad (+6)^2 = +36$$

proprietà La radice quadrata di un numero negativo, nei numeri reali, è un'operazione **impossibile**.

Lo stesso vale per tutte le radici di indice pari: non si possono calcolare se il radicando è negativo.

La situazione è diversa con le radici di indice dispari.
Quale può essere la radice cubica di −27? Per definizione è quel numero che elevato alla terza dà −27.

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \text{perché} \quad (-3)^3 = -27$$

proprietà La radice cubica di un numero ha lo stesso segno del radicando. E in generale vale questa uguaglianza:

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

Per esempio, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

Come calcoliamo le radici quadrate e cubiche, così possiamo calcolare le radici n-esime, per ogni indice naturale n.

definizione La **radice n-esima** del numero x, se esiste, è il numero concorde con y che elevato alla n dà x

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \text{se} \quad y^n = x$$

Se n è un numero pari e x è un numero negativo $\sqrt[n]{x}$ non esiste.