UNITÀ 2

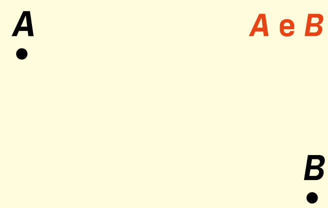
ENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI

1. PUNTI

Euclide è stato uno dei matematici più importanti di sempre. Visse in Grecia, tre secoli prima di Cristo. Il suo libro, gli *Elementi*, viene ancora pubblicato e raccoglie molte conoscenze importanti della matematica antica.
Euclide capì che la geometria non doveva occuparsi degli **oggetti concreti**, reali, ma doveva riflettere su **idee astratte**. Astratto è il contrario di concreto. Concreto è ciò che percepiamo con i nostri sensi. Le cose astratte non sono percepibili con i sensi, ma "vivono" nella nostra immaginazione. Per poterne parlare con le altre persone dobbiamo appoggiarci a delle **rappresentazioni**, dei disegni, delle figure.
Alla base della geometria ci sono tre idee astratte fondamentali: il **punto**, la **retta** e il **piano**.

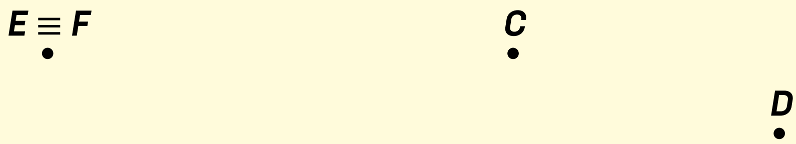
IL PUNTO

Gli oggetti concreti ci aiutano a pensare alle forme geometriche, e viceversa le forme geometriche ci aiutano a capire le proprietà che valgono per tutti gli oggetti reali.
Il segno della matita, un granello di sabbia, una stella nel cielo sono oggetti reali che ci aiutano a pensare al **punto**.
Come tutte le forme geometriche, il punto è astratto: nella realtà non si trova alcun punto, solo oggetti che gli assomigliano e che ci aiutano a pensarlo.
Il punto non ha dimensioni, perché non occupa spazio e non può essere diviso in parti. Euclide dice: "Il punto è ciò che non ha parti".
Per indicare la posizione di un punto disegniamo un piccolo segno e lo indichiamo con una lettera maiuscola: *A*, *B*, *C*...



***A* e *B* sono due punti**

Per indicare che due punti coincidono, scriviamo $E \equiv F$.



il punto *E* coincide con il punto *F*
E ed *F* sono **coincidenti**

il punto *D* non coincide con *C*
D e *C* sono **distinti**

definizione Due punti sono **coincidenti** se occupano la stessa posizione nello spazio. Due punti sono **distinti** se occupano posizioni diverse nello spazio.

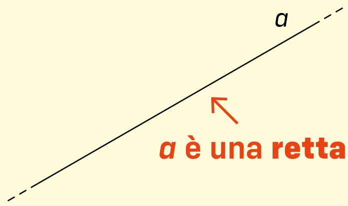
2. RETTE E PIANI

LA RETTA

Come il punto, anche la retta è una forma geometrica: la traccia di una stella cadente, la scia di un aereo nel cielo, una linea dritta e molto sottile tracciata con matita e righello sono rappresentazioni di una retta.

La **retta** è una linea illimitata, formata da infiniti punti, che ha una sola dimensione, la lunghezza, ed è priva di larghezza e di spessore.

Una retta non ha punto di inizio né di fine.
Per questo motivo, la disegniamo tratteggiandone le estremità.
Indichiamo le rette con le lettere minuscole: *a*, *b*, *c*...



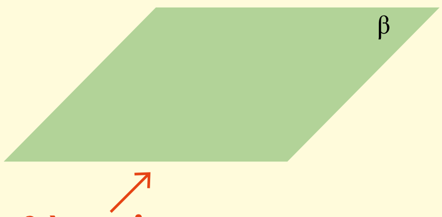
a è una **retta**

IL PIANO

Il **piano** è una superficie illimitata, formata da infiniti punti, che ha due sole dimensioni, la **lunghezza** e la **larghezza**, ed è priva di spessore.

Per questo lo rappresentiamo come una figura senza bordi a significare che il piano si prolunga senza limiti.

Per indicare i piani si usano le lettere dell'alfabeto greco: α, β, γ, ...
Per gran parte del nostro corso ci occuperemo solo di geometria piana, per cui gli unici concetti fondamentali che useremo saranno punti e rette.
Solo in terza studieremo la geometria solida e vedremo come si comportano punti, rette e piani nello spazio.

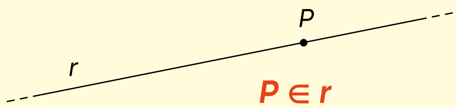


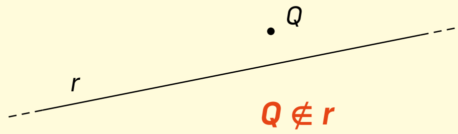
β è un **piano**

PUNTI E RETTE

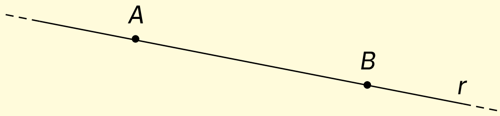
Se disegniamo un punto e una retta, possiamo avere due casi.

- Il punto P **appartiene** alla retta r e si scrive $P \in r$.
- Il punto Q **non appartiene** alla retta r e si scrive: $Q \notin r$.





Si può anche dire che la retta r passa per il punto P e che non passa per il punto Q.
Usiamo il verbo **appartenere** perché una retta è un **insieme** i cui **elementi** sono i punti.
Possiamo anche vedere un piano come un insieme nel quale le rette sono **sottoinsiemi**.
Una retta si può anche indicare con due suoi punti. La retta r si può anche chiamare retta AB oppure retta BA.



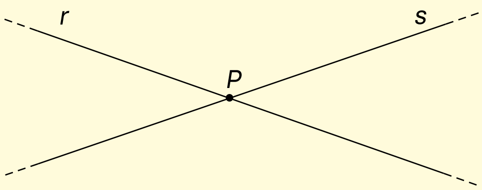
3. RETTE INCIDENTI, PARALLELE E PERPENDICOLARI

Come possono essere le posizioni reciproche di due rette nel piano?

RETTE INCIDENTI

Due rette **distinte** r ed s o non hanno nessun punto in comune o ne hanno uno solo P. Il punto P è il loro punto di **incidenza** o di **intersezione**, e si può scrivere $P = r \cap s$.

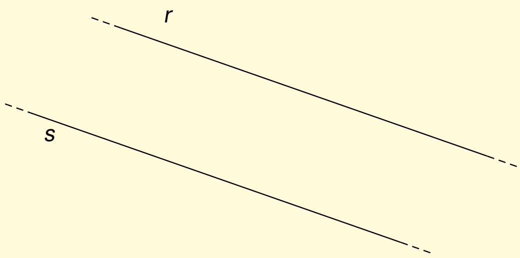
definizione Due rette che stanno su uno stesso piano e hanno un solo punto in comune si dicono **incidenti**. Il punto in comune è il punto di **incidenza** o di **intersezione**.

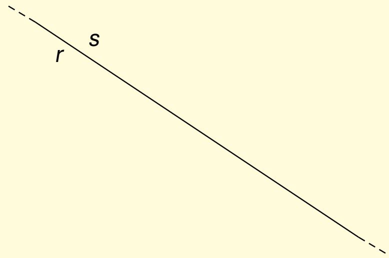


$r \nparallel s$: r è incidente a s $\quad$ P è il punto di incidenza di r e di s

RETTE PARALLELE

definizione Due rette sono **parallele** se stanno su uno stesso piano e non hanno alcun punto in comune oppure sono **coincidenti**.
Due rette parallele hanno la stessa direzione.

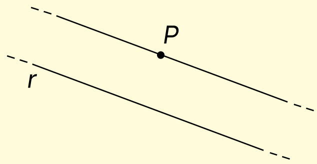




$r \parallel s$: r è parallela a s

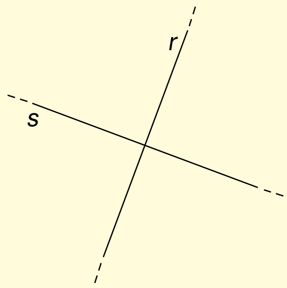
due rette coincidenti $r \equiv s$ sono parallele

Due rette distinte possono avere al massimo un punto in comune. Se due rette hanno due punti in comune, allora sono coincidenti e hanno tutti i punti in comune.
Per un punto P passa una e una sola retta parallela a una retta r.



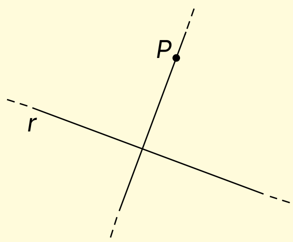
RETTE PERPENDICOLARI

definizione Due rette sono **perpendicolari** se sono incidenti e se dividono il piano in quattro parti uguali.



$r \perp s$: r è perpendicolare a s

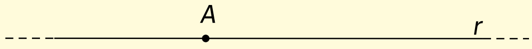
Per un punto P passa una e una sola retta perpendicolare a una retta r.



4. SEMIRETTE E SEGMENTI

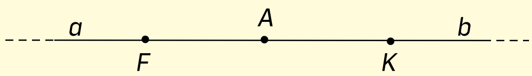
SEMIRETTA

Se prendiamo una retta *r* e disegniamo su di essa un punto *A*, questo la divide in due parti.



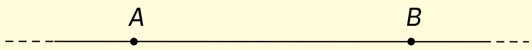
definizione Ciascuna delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto *A* si chiama **semiretta di origine *A***.

Le due semirette si trovano da parti opposte del punto *A*: si dice che sono **opposte**.
Una semiretta è **illimitata**.
Le semirette si possono indicare con le lettere minuscole (*a*, *b*, ...) oppure specificando l'origine *A* e un altro punto: per esempio, *F* o *K*.
Il punto *A* è l'origine di due semirette: la semiretta *a* oppure *AF* e la semiretta *b* oppure *AK*.



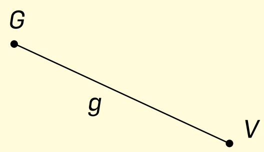
SEGMENTO

Se disegniamo su una retta due punti *A* e *B* una parte della retta è compresa tra i due punti ed è limitata.



definizione Un **segmento** è la parte di retta delimitata da due punti. I due punti sono gli **estremi** del segmento.

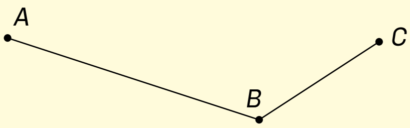
Possiamo indicare un segmento con una lettera minuscola oppure con i due punti che ne sono gli estremi: il segmento *g* oppure il segmento *GV* o *VG*.
I punti *G* e *V* sono gli estremi.



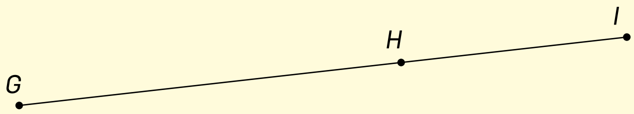
definizione **Due segmenti che possono sovrapporsi esattamente sono congruenti**. Essi hanno la stessa lunghezza.

SEGMENTI CONSECUTIVI E SEGMENTI ADIACENTI

definizione Due segmenti che hanno solo un estremo in comune sono **consecutivi**. Due segmenti consecutivi che stanno sulla stessa retta sono **adiacenti**.



segmenti consecutivi



segmenti adiacenti

I segmenti *AB* e *BC* sono **consecutivi**. Anche dai loro nomi si vede che hanno un estremo in comune, il punto *B*.
GH e *HI* hanno un estremo in comune (*H*) e stanno sulla stessa retta.

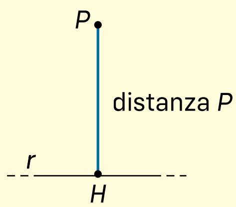
5. DISTANZA FRA DUE PUNTI

Per sapere quanto distano i punti *A* e *B* disegniamo il segmento *AB* che li unisce. La sua lunghezza è la distanza tra *A* e *B*, ovvero il percorso più breve per andare dal punto *A* al punto *B*.

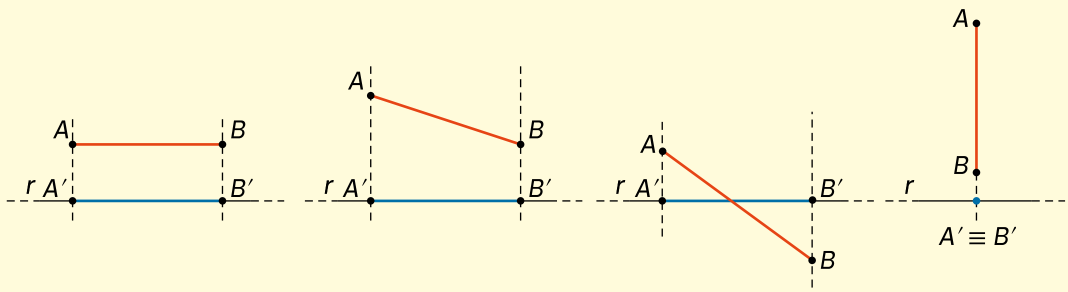
distanza *AB*

definizione La **distanza** del punto *A* dal punto *B* è la lunghezza del segmento *AB*.

La **distanza** di un punto *P* da una retta *r* è la lunghezza del segmento di perpendicolare che unisce il punto *P* alla retta *r*.
Abitualmente chiamiamo *H* l'intersezione tra la retta *r* e la perpendicolare per *P*.
Il punto *H* si chiama **proiezione** di *P* su *r*.



Possiamo fare la proiezione di un segmento *AB* su una retta *r*.
È il segmento fornito da tutte le proiezioni dei suoi punti su *r*.



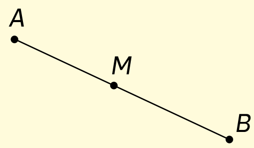
Se il segmento è parallelo alla retta, la proiezione è congruente al segmento.

Negli altri casi, la proiezione è minore del segmento.

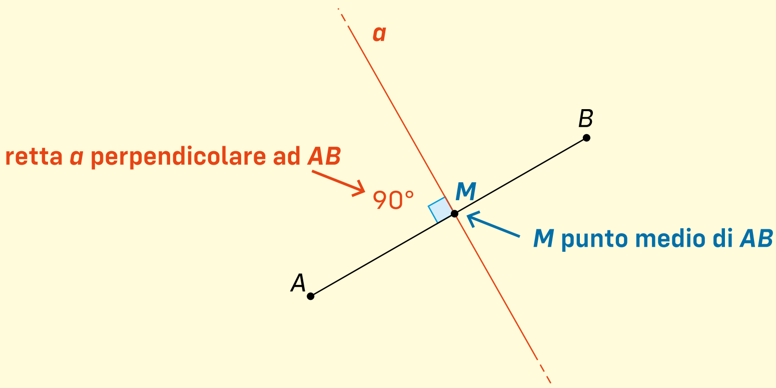
Se il segmento è perpendicolare alla retta, la proiezione è un punto.

6. PUNTO MEDIO E ASSE DI UN SEGMENTO

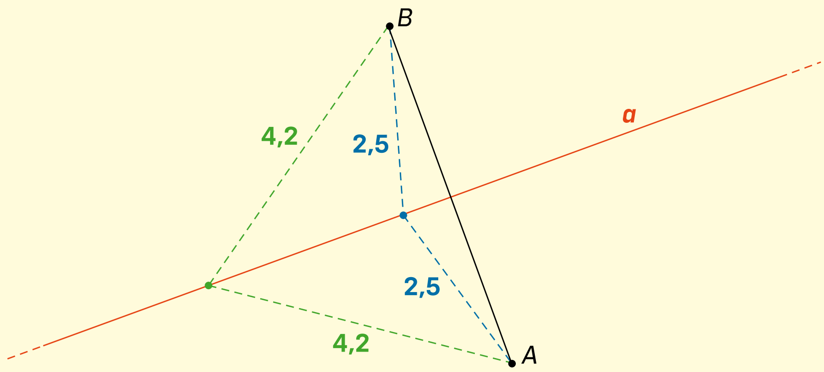
definizione Il **punto medio** di un segmento è il punto che lo divide in due parti congruenti.



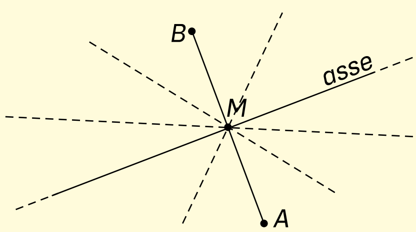
definizione L'**asse di un segmento** è la retta perpendicolare al segmento che passa per il punto medio del segmento.



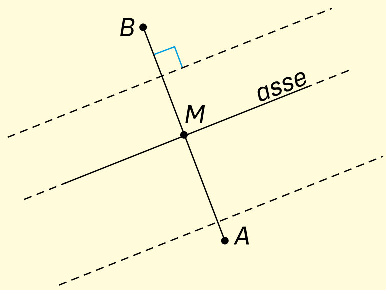
Prendi un punto a caso sull'asse e misura la sua distanza dai due estremi del segmento: le due distanze risultano uguali. Se fai lo stesso con un altro punto troverai la stessa cosa.



proprietà Ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante, cioè ha la stessa distanza dai due estremi del segmento.



Per il punto medio di un segmento passano infinite rette, ma una sola di queste è l'asse del segmento.



Un segmento può essere tagliato da infinite rette a esso perpendicolari, ma una sola lo interseca nel punto medio.

7. LE BASI DELLA GEOMETRIA

Ai matematici piace sempre sapere il perché delle cose, vogliono avere una spiegazione di ogni affermazione.

Per esempio in geometria, siccome spesso le affermazioni riguardano grandi categorie di figure (per esempio, **tutti** i triangoli oppure **tutte** le rette parallele...) non basta fare qualche esempio per essere sicuri che un'affermazione valga sempre. E non bastano nemmeno tanti esempi.

È necessario fare un ragionamento generale che si chiama **dimostrazione**. Una dimostrazione è fatta da una catena di deduzioni, un po' come quelle che fa un detective: se è vero questo, allora è vero anche quest'altro; ma se è vero quest'altro allora è vero quest'altro ancora...

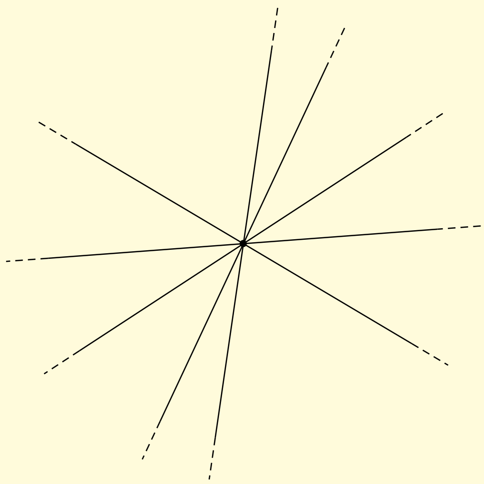
Dimostrare proprio tutto però non è possibile. Bisogna scegliere dei punti di partenza molto semplici, che ci appaiono evidenti e che si accettano così, senza dimostrarli: si chiamano **assiomi** o **postulati**.

Gli assiomi sono affermazioni di base e riguardano solo gli oggetti fondamentali che hai studiato nelle prime lezioni: i punti e le rette per la geometria piana e anche i piani per la geometria solida. Gli assiomi ci spiegano le relazioni tra questi oggetti.

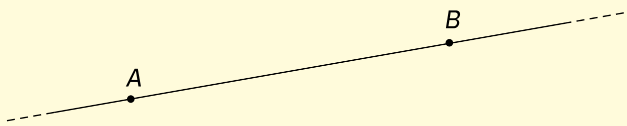
Euclide negli *Elementi* aveva scelto cinque postulati, poi in 2300 anni di studi i matematici li hanno modificati un po', corretti, migliorati e nel 1899 il tedesco David Hilbert ne ha scelti venti, che però sono un po' difficili da capire. Qui di seguito li ritrovi raggruppati e semplificati.

ASSIOMI PER LA GEOMETRIA PIANA

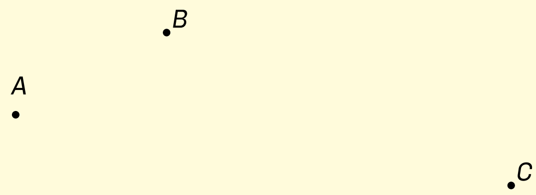
1. Per un punto passano infinite rette.



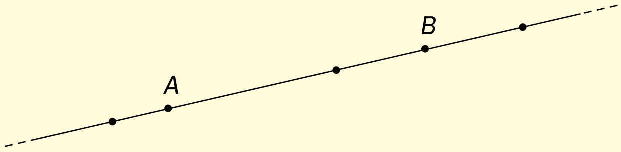
2. Per due punti distinti c'è una e una sola retta che passa per entrambi.



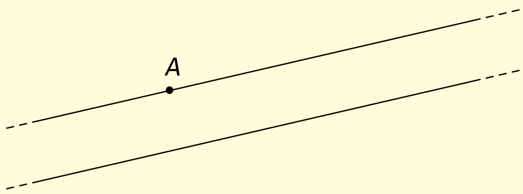
3. Esistono infiniti punti a tre a tre non allineati.



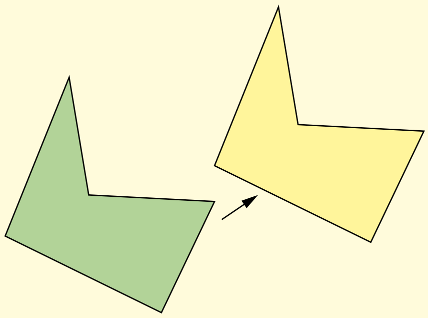
4. La retta è illimitata da entrambe le parti ed è continua e ordinata. Dati due punti *A* e *B* su una retta se ne può trovare almeno uno prima di *A*, almeno uno tra *A* e *B* e almeno uno dopo *B*.



5. Data una retta *r* e un punto esterno *A*, esiste una e una sola retta passante per *A* e parallela alla retta *r*.

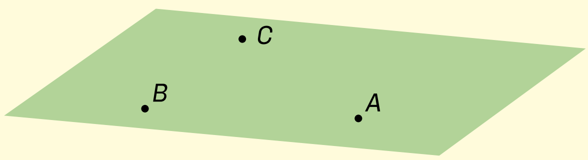


6. Si può trasportare una figura geometrica per sovrapporla a un'altra figura geometrica.

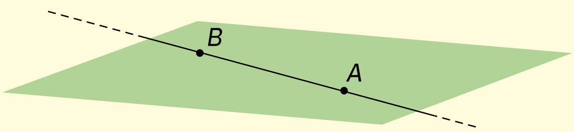


ASSIOMI PER LA GEOMETRIA SOLIDA

7. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.



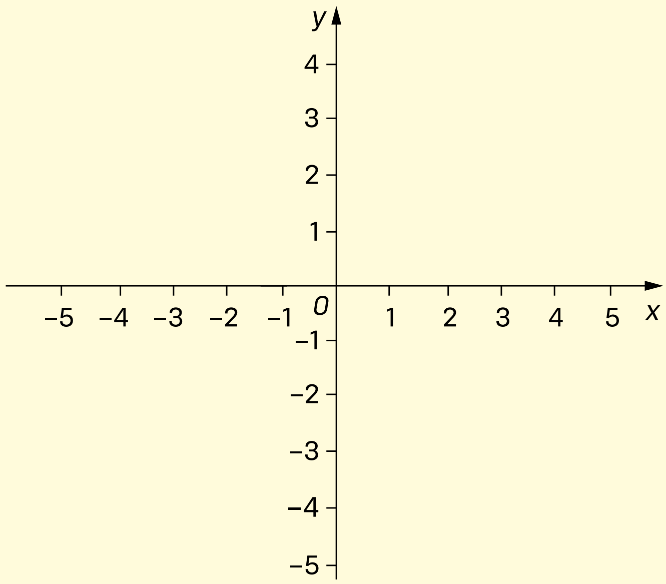
8. Se due punti *A* e *B* sono sul piano anche la retta *AB* sta tutta nel piano.



8. IL PIANO CARTESIANO

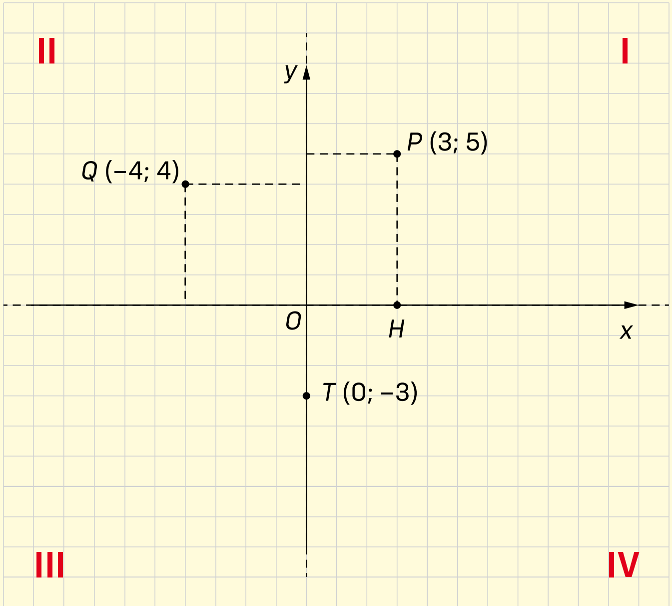
Disegniamo due rette numeriche perpendicolari in modo che si incontrino nelle rispettive origini *O* e che dividano il piano in quattro parti uguali.

definizione Il piano su cui sono tracciate due rette numeriche perpendicolari che si incontrano nelle loro origini si chiama **piano cartesiano**.



Il piano cartesiano prende il nome dallo scienziato francese René Descartes, vissuto nel Seicento, che in italiano chiamiamo Cartesio.
Le quattro parti uguali del piano si chiamano **quadranti**: in senso antiorario partendo da "in alto a destra", primo, secondo, terzo e quarto quadrante.
Le due rette perpendicolari si chiamano **assi** del piano cartesiano e ci aiutano a individuare e riconoscere la posizione dei punti: l'asse orizzontale è l'asse delle **ascisse** (o delle *x*); l'asse verticale è l'asse delle **ordinate** (o delle *y*).

Un punto del piano cartesiano ha due **coordinate**, due numeri, che ne identificano la posizione: vediamo come.



Il punto *P*, nel primo quadrante della figura qui sopra, ha coordinate +3 e +5, perché la sua proiezione corrisponde a +3 sull'asse delle *x*, vista come retta numerica. E la sua proiezione *K* corrisponde a +5 sull'asse delle *y*.
(+3; +5) sono ascissa e ordinata di *P*, ovvero le sue coordinate.
Il punto *Q*, nel secondo quadrante, ha ascissa −4 e ordinata +4. Il punto *T* ha coordinate 0 e −3.
Il punto *O* dei due assi si chiama **origine** del riferimento cartesiano e ha coordinate (0; 0).

definizione Ogni punto del piano è determinato da due **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa**, la seconda **ordinata**.