UNITÀ 2

ADDIZIONE, MOLTIPLICAZIONE E SOTTRAZIONE

1. ADDIZIONE

Un contenitore contiene 4 matite, un altro ne contiene 5. Per sapere quante matite ci sono in tutto, sappiamo già che possiamo aggiungere 5 a 4. Aggiungere 5 a 4 significa contare fino a 4 e quindi prosegui per altre 5 unità: otteniamo 9.

$$4 + 5 = 9$$

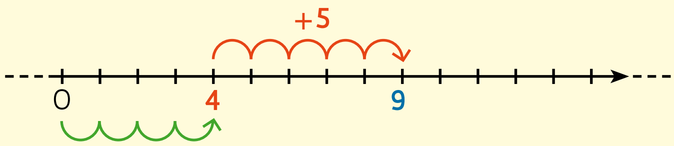
Abbiamo calcolato un'**addizione**.

definizione L'**addizione** è un'operazione tra due numeri che si chiamano **addendi**. L'addizione produce un terzo numero (**somma** o **totale**) che si ottiene contando dopo il primo addendo tante unità quante ne indica il secondo.

$$\underbrace{4}_{1° \text{ addendo}} + \overbrace{5}^{2° \text{ addendo}} = \underbrace{9}_{\text{somma}}$$

Calcolare un'addizione si dice **addizionare** o **sommare**. Il simbolo dell'addizione è il **+** (**più**).

Possiamo rappresentare le addizioni sulla retta numerica: prima contiamo tante unità quante ne indica il primo addendo, poi facciamo lo stesso con il secondo.



Se scegliamo due numeri naturali a piacere, la loro somma è sempre un numero naturale. Per questo motivo, diciamo che l'addizione è un'**operazione interna** ai numeri naturali. Vedremo che altre operazioni non sono interne ai numeri naturali, proprio perché il loro risultato non è sempre un numero naturale.

C'è una tecnica che conosciamo sin dalla scuola primaria per calcolare una somma: l'**addizione in colonna**. Per non sbagliare, è importante scrivere ordinatamente in colonna le unità sotto le unità, le decine sotto le decine e così via. L'addizione in colonna si usa anche per sommare due numeri decimali.

39 +	37 +	52,7 +	23,49 +
56 =	5 =	33,2 =	18,10 =
95	42	85,9	41,59

2. PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE

Le proprietà di un'operazione descrivono la possibilità di svolgere uno stesso calcolo in modi diversi senza che il risultato cambi: puoi scegliere tu il modo più semplice, o quello più adatto a te.

LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Consideriamo le due addizioni:

$$\mathbf{23 + 8 = 31} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{8 + 23 = 31}$$

Abbiamo scambiato l'ordine degli addendi e la somma è rimasta la stessa.

proprietà L'addizione **gode della proprietà commutativa.** Se cambiamo l'ordine degli addendi, il risultato non cambia.

$$a + b = b + a$$

L'aggettivo "commutativo" deriva da *commutare* che significa *scambiare*.

LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

Consideriamo le due espressioni (15 + 4) + 13 e 15 + (4 + 13) ciascuna delle quali contiene due addizioni. Per indicare quella da svolgere per prima la scriviamo con le parentesi.

$$\mathbf{(15 + 4) + 13 = 19 + 13 = 32} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{15 + (4 + 13) = 15 + 17 = 32}$$

La somma che otteniamo è sempre 32, e non è un caso.

proprietà L'addizione **gode della proprietà associativa.** In qualsiasi somma di tre addendi si può iniziare dall'addizione dei primi due oppure dall'addizione del secondo e del terzo: il risultato non cambia.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

La proprietà associativa è particolarmente utile quando due addendi hanno la somma che finisce con la cifra zero: cominciando a sommare questi addendi i calcoli si semplificano.

ESEMPIO Calcolare:
33 + 27 + 48 = (33 + 27) + 48 = 60 + 48 = 108
per molti è più facile di:
33 + 27 + 48 = 33 + (27 + 48) = 33 + 75 = 108
anche se ovviamente i risultati sono uguali.

La proprietà associativa permette anche di procedere "al contrario": la somma di due addendi non cambia se a uno di essi sostituiamo due numeri che lo ammettono come somma.

$$\mathbf{33 + 12 = (25 + 8) + 12 = 25 + (8 + 12) = 25 + 20 = 45}$$

Considerare 33 + 12 come (25 + 8) + 12 vuol dire applicare quella che spesso viene chiamata **proprietà distributiva**, che è la proprietà associativa letta da destra verso sinistra.
A volte è utile tenere a mente entrambe le proprietà, quella commutativa e quella associativa. Possiamo calcolare 46 + 17 + 24 procedendo così:

$$\mathbf{46 + 17 + 24 = 46 + 24 + 17 = (46 + 24) + 17 = 70 + 17 = 87}$$

3. MOLTIPLICAZIONE

Uno stampo per il ghiaccio ha 4 righe e 8 colonne.
In tutto i cubetti di ghiaccio sono

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32$$

Stiamo considerando 8 volte 4.
Cioè stiamo **moltiplicando** 8 per 4.

$$4 \times 8 = 32$$

definizione La **moltiplicazione** è un'operazione tra due numeri, che si chiamano **fattori**.
La moltiplicazione produce un terzo numero, il **prodotto**, che si ottiene sommando tra loro tanti addendi uguali al primo fattore quanti ne indica il secondo fattore.

Il simbolo della moltiplicazione è il × (**per**) oppure un · (puntino), che evita confusione tra il segno di moltiplicato e la lettera x.
D'ora in poi useremo sempre il puntino.

$$\underset{1^\circ\text{fattore}}{4} \cdot \overset{2^\circ\text{fattore}}{8} = \underset{\text{prodotto}}{32}$$

Se scegliamo due numeri naturali a piacere, il loro prodotto è sempre un numero naturale. Come l'addizione, anche la moltiplicazione è un'**operazione interna** ai numeri naturali.

4. PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE

LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Consideriamo le due moltiplicazioni:

$$5 \cdot 13 = 65 \quad \text{e} \quad 13 \cdot 5 = 65$$

In pratica, ripetere 13 volte il numero 5 o 5 volte il numero 13 è la stessa cosa.
Abbiamo cambiato l'ordine dei fattori e abbiamo ottenuto lo stesso prodotto.

proprietà La moltiplicazione **gode della proprietà commutativa.**
Se si cambia l'ordine dei fattori, il risultato non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

I termini della moltiplicazione si chiamano fattori indipendentemente dalla loro posizione. Proprio perché la moltiplicazione è commutativa, non ha senso distinguerli con nomi diversi. Per lo stesso motivo entrambi i termini dell'addizione si chiamano addendi.

LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

Come per l'addizione, consideriamo le due espressioni $(5 \cdot 4) \cdot 3$ e $5 \cdot (4 \cdot 3)$, ciascuna delle quali è formata da due moltiplicazioni. Ricordiamo che mettiamo tra parentesi quella che vogliamo calcolare prima.

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 \qquad \text{e} \qquad 5 \cdot (4 \cdot 3) = 5 \cdot 12 = 60$$

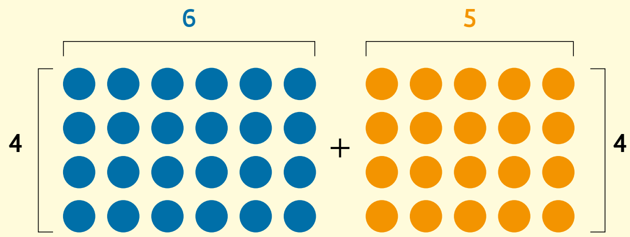
Entrambi i prodotti sono 60, indipendentemente dall'ordine in cui abbiamo calcolato le moltiplicazioni.

proprietà La moltiplicazione **gode della proprietà associativa**. Nel prodotto di tre fattori si può iniziare dalla moltiplicazione dei primi due oppure da quella del secondo e del terzo fattore e il risultato non cambia.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

Ci sono anche espressioni nelle quali compaiono sia addizioni sia moltiplicazioni.



$$4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot (6 + 5)$$

In questi casi troviamo lo stesso risultato.

$$(6 + 5) \cdot 4 = 11 \cdot 4 = 44 \qquad \text{e} \qquad 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 24 + 20 = 44$$

I due risultati sono entrambi 44.
Nel passaggio dalla prima alla seconda espressione si dice che abbiamo **distribuito** la moltiplicazione rispetto all'addizione.

proprietà La moltiplicazione **gode della proprietà distributiva** rispetto all'addizione. Se moltiplichiamo un numero per la somma di due addendi, oppure moltiplichiamo il numero separatamente per ciascuno degli addendi e dopo sommiamo i risultati, il risultato non cambia.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Calcoliamo in colonna anche una moltiplicazione

$$\begin{array}{r} 24\ \cdot \\ 35 = \\ \hline 20 \\ 100 \\ 120 \\ 600 \\ \hline 840 \end{array}$$

In ogni riga vediamo i due fattori come somme,
$24 = 20 + 4$ e $35 = 30 + 5$,
e operiamo con la proprietà distributiva,
$4 \cdot 5 = 20$
poi $20 \cdot 5 = 100$
poi $4 \cdot 30 = 120$
poi $20 \cdot 30 = 600$.

Conosci già la moltiplicazione in colonna con i riporti.
Quella nell'esempio è la moltiplicazione di Peano che evita di tenere a mente i riporti ma ci fa scrivere qualche riga in più.

5. ZERO E UNO NELL'ADDIZIONE E NELLA MOLTIPLICAZIONE

Se a un numero, per esempio 7, aggiungiamo zero, cioè niente, otteniamo ancora 7.

$$7 + 0 = 7$$

Lo zero non ha nessun effetto nell'addizione, per questo viene detto **elemento neutro**.

definizione Il numero 0 è l'**elemento neutro dell'addizione**, perché se si somma 0 a un qualunque numero, si ottiene il numero stesso.

$$a + 0 = a$$

Nella moltiplicazione è il numero 1 a non avere effetto sul calcolo.
Moltiplicare un numero per 1 significa ripeterlo una volta sola, quindi:

$$4 \cdot 1 = 4$$

definizione Il numero 1 è l'**elemento neutro della moltiplicazione**, perché il prodotto tra un qualunque numero e 1 è il numero stesso.

$$a \cdot 1 = a$$

Lo zero, invece, si comporta in un modo del tutto particolare nella moltiplicazione.
Il prodotto di un qualunque fattore per zero è sempre nullo.
Il prodotto di 14 e 0 è 0.

$$14 \cdot 0 = 0$$

Per questo diciamo che lo zero è l'elemento assorbente della moltiplicazione.

definizione Il numero 0 è l'**elemento assorbente della moltiplicazione**, perché il prodotto tra un qualunque numero e 0 è sempre 0.

$$a \cdot 0 = 0$$

6. SOTTRAZIONE

In una scatola ci sono 8 cioccolatini e ne mangiamo 3. Quanti ne rimangono? Quanti cioccolatini dobbiamo aggiungere ai 3 mangiati per ottenere gli 8 che avevamo all'inizio?

$$8 - 3 = 5 \qquad \text{perché} \qquad 3 + 5 = 8$$

Questa nuova operazione è una sottrazione. Sottrarre significa togliere.

definizione La sottrazione è un'operazione tra due numeri.
La sottrazione trova un terzo numero (**differenza**) che sommato al secondo (**sottraendo**) dà come somma il primo (**minuendo**).

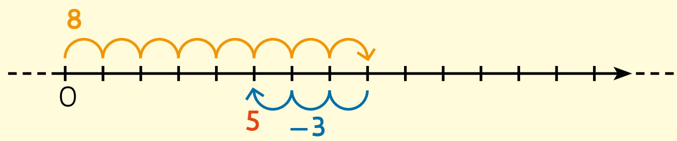
sottraendo

8 − 3 = 5

minuendo differenza

Sottraendo significa "che deve essere sottratto, cioè tolto".
Minuendo significa "che deve essere diminuito".
Il segno della sottrazione è il − (**meno**).

Sulla retta numerica rappresentiamo la sottrazione in questo modo: arrivati al minuendo, "torniamo indietro" di tante unità quante ne indica il sottraendo.
Ciò che resta è la differenza.



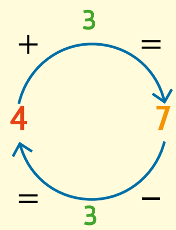
Possiamo operare in colonna anche con la sottrazione, sia con i numeri naturali sia con i numeri decimali. L'importante è allineare sempre le unità con le unità, i decimi con i decimi ecc.

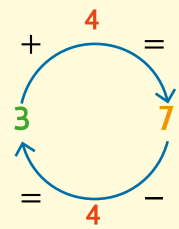
56 −	37 −	52,7 −	23,49 −
39 =	5 =	33,2 =	18,10 =
17	32	19,5	5,39

L'OPERAZIONE INVERSA DELL'ADDIZIONE

Consideriamo l'addizione 4 + 3 = 7. Per "tornare indietro" togliamo dalla somma ciò che abbiamo aggiunto e torniamo al punto di partenza, 7 − 3 = 4 oppure 7 − 4 = 3.
La sottrazione è l'**operazione inversa** dell'addizione, perché ci permette di "tornare indietro", di "disfare" l'operazione.

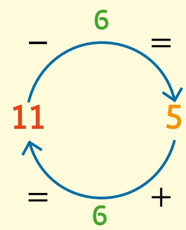
4 + 3 = 7 → 7 − 4 = 3
4 + 3 = 7 → 7 − 3 = 4





Allo stesso modo l'addizione è l'operazione inversa della sottrazione, infatti ci permette di "disfare" la sottrazione, 11 − 5 = 6, aggiungendo al risultato ciò che abbiamo tolto, 5 + 6 = 11.

11 − 6 = 5 ⟶ 5 + 6 = 11



A ogni sottrazione corrisponde un'addizione. Viceversa, a ogni addizione corrispondono due sottrazioni.

LO ZERO NELLA SOTTRAZIONE

Se da 6 togliamo 0, cioè non togliamo niente, otteniamo ancora 6:

$$6 - 0 = 6$$

Se il sottraendo è zero, la differenza è uguale al minuendo.
E se a essere zero è il minuendo? Abbiamo due casi.

- Se anche il sottraendo è zero, la differenza è zero:

$$0 - 0 = 0$$

- Se invece il sottraendo è diverso da zero, la differenza non è un numero naturale:

$$0 - 6 = -6 \qquad \textbf{che non è un numero naturale}$$

Lo zero si comporta da elemento neutro solo quando è nella posizione di sottraendo. In generale, la sottrazione non ha elemento neutro.

7. PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE

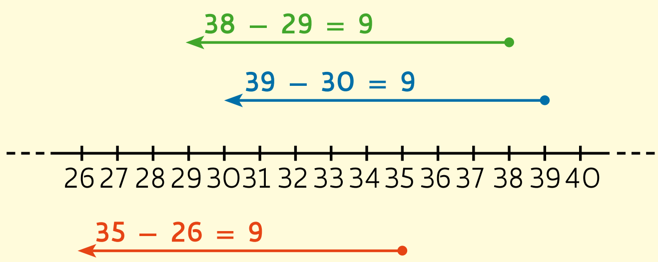
LA PROPRIETÀ INVARIANTIVA

Consideriamo le espressioni:

$$38 - 29 = 9$$

$$(38 + 1) - (29 + 1) = 39 - 30 = 9$$

$$(38 - 3) - (29 - 3) = 35 - 26 = 9$$



Hanno tutte e tre lo stesso risultato perché è come se la sottrazione "si spostasse" sulla retta numerica.
Rispetto alla prima espressione, nella seconda abbiamo aggiunto lo stesso numero (1) a minuendo e sottraendo e nella terza abbiamo tolto lo stesso numero (3) a minuendo e sottraendo.

Lo vediamo anche con questo schema:

38	–	29	=	9		38	–	29	=	9
↓ +1		↓ +1				↓ −3		↓ −3		
39	–	30	=	9		35	–	26	=	9

proprietà La sottrazione **gode della proprietà invariantiva**. Sommando o sottraendo uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo, il risultato non cambia.

La proprietà invariantiva si può usare con qualsiasi numero, ma è più utile se si riesce a far diventare il sottraendo "cifra tonda", come nel primo caso.

La sottrazione non gode né della proprietà commutativa (infatti $5 - 3$ è diverso da $3 - 5$), né della proprietà associativa.

Se ci sono più sottrazioni consecutive l'unica possibilità è eseguirle nell'ordine in cui sono scritte:

$$\mathbf{11 - 6 - 3 = 5 - 3 = 2}$$

Infatti se iniziamo dalla seconda sottrazione $(6 - 3)$,

$$\mathbf{11 - (6 - 3) = 11 - 3 = 8}$$

il risultato cambia ed è sbagliato.

LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

La proprietà distributiva della moltiplicazione vale anche rispetto alla sottrazione.

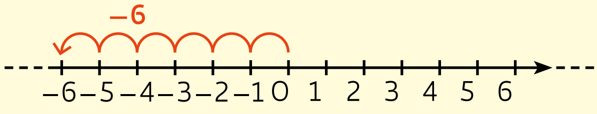
$$\mathbf{(20 - 3) \cdot 4 = 20 \cdot 4 - 3 \cdot 4}$$

La moltiplicazione può essere "distribuita" su entrambi i termini della sottrazione, infatti il risultato è $80 - 12 = 68$.
Se invece svolgiamo prima la sottrazione, $17 \cdot 4 = 68$.

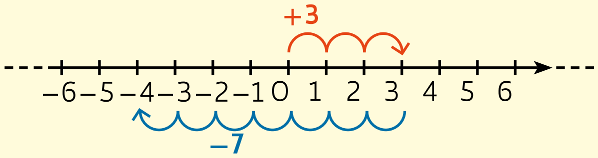
proprietà La **moltiplicazione gode della proprietà distributiva** rispetto alla sottrazione. Se moltiplichiamo un numero per la differenza fra due termini, oppure moltiplichiamo il numero separatamente per ciascuno dei due termini e poi sottraiamo i risultati, il risultato non cambia.

UN'OPERAZIONE NON INTERNA AI NUMERI NATURALI

L'abbiamo già visto precedentemente, ci sono sottrazioni la cui differenza non è un numero naturale (per esempio $0 - 6$). Lo stesso accade a $3 - 7$ e ogni volta che il minuendo è minore del sottraendo. Quindi, dato che la differenza non è sempre un numero naturale, diciamo che la sottrazione è un'operazione **non interna** ai numeri naturali. Eseguendo le sottrazioni sulla retta...



$$\mathbf{0 - 6 = -6}$$



$$\mathbf{3 - 7 = -4}$$

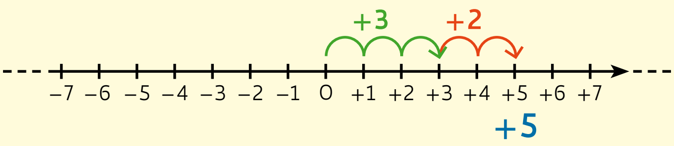
... otteniamo numeri negativi.

8. OPERAZIONI CON I NUMERI POSITIVI E NEGATIVI

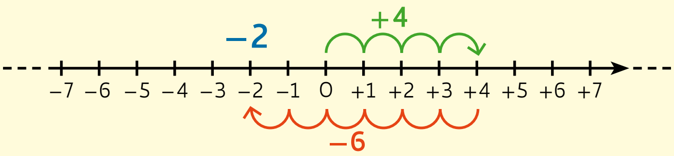
SOMMA ALGEBRICA

Per operare con i numeri interi (**Z**) è sufficiente ricordare che si parte da 0.
Con il **segno più** ci si muove verso **destra**, con il **segno meno** ci si muove verso **sinistra**. Il punto di arrivo è il risultato.

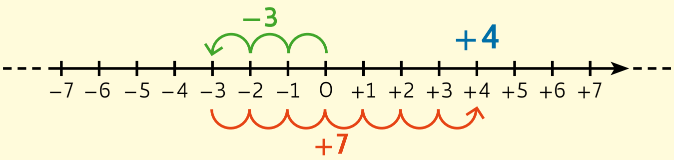
$+3 +2$



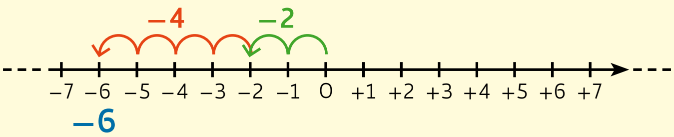
$+4 -6$



$-3 +7$



$-2 -4$



Se qualche numero è scritto con le parentesi possiamo toglierle, ricordando che il segno + lascia le cose come stanno, mentre il segno – dà il numero **opposto**.

$$(+5) + (+3) = 5 + 3 \qquad (+5) - (+3) = 5 - 3$$

$$(+5) - (-3) = 5 + 3 \qquad (+5) + (-3) = 5 - 3$$

$$(-5) + (+3) = -5 + 3 \qquad (-5) - (+3) = -5 - 3$$

$$(-5) - (-3) = -5 + 3 \qquad (-5) + (-3) = -5 - 3$$

Con i numeri interi, addizione e sottrazione diventano un'unica operazione chiamata **somma algebrica**. Infatti possiamo scrivere anche le sottrazioni con il segno +:

$$8 - 5 = 8 + (-5)$$

Continuano a valere la proprietà commutativa e la proprietà associativa, purché ogni numero "si porti appresso" il proprio segno:

$$5 - 11 = -11 + 5$$

$$(3 - 2) - 4 = 3 + (-2 - 4)$$

Lo 0 è l'elemento neutro della somma algebrica:

$$0 - 3 = -3 + 0 = -3$$

MOLTIPLICAZIONE

Come si moltiplicano due numeri interi?
La regola è semplice anche se all'inizio può sembrare strana (scoprirai più avanti perché si fa così).
In pratica si moltiplicano i numeri con le normali tabelline e si fa attenzione ai segni (**regola dei segni**):

$$(+2)\cdot(+4)=+8$$
$$(+2)\cdot(-4)=-8$$
$$(-2)\cdot(+4)=-8$$
$$(-2)\cdot(-4)=+8$$

Regola dei segni

$$+\cdot+=+$$
$$+\cdot-=-$$
$$-\cdot+=-$$
$$-\cdot-=+$$

proprietà Per **moltiplicare** due numeri relativi si moltiplicano le parti numeriche e si determina il segno con la **regola dei segni**.

Anche nell'insieme dei numeri interi relativi il numero 0 è l'**elemento assorbente** e il numero 1 è l'**elemento neutro** della moltiplicazione.
Valgono anche le altre proprietà della moltiplicazione: commutativa, associativa e distributiva.